Terminale

Formulaire sur les suites

I) Suites monotones

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>croissante</u> si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est <u>décroissante</u> si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour étudier le sens de variation de (u_n) :

- On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$ (suite $(u_{n+1} = f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$)
- On étudie les variations de f (suite $(u_n = f(n))_{n\in\mathbb{N}}$)

II) Suites bornées

(u_n) est <u>majorée</u> par M si $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(u_n) est <u>minorée</u> par m si $u_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour montrer que :

(u_n) est majorée	(u_n) est minorée
On étudie le signe de $u_n - M$	On étudie le signe de $u_n - m$
On montre $u_n - M \leq 0$.	On montre que $u_n - m \geq 0$

III) Suites arithmétiques et géométriques

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n \times q$
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 \times q^n$
Relation entre 2 termes	$u_n = u_p (n-p) r$ En particulier: $u_n = u_1 (n-1) r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$ En particulier: $u_n = u_1 \times q^{n-1}$
Somme des termes $S = \sum_{i=a}^{b} u_i$	$S = \frac{(1^e \text{ terme}) + (\text{Dernier terme})}{2} \times (\text{nombre de termes})$ $S = \frac{u_a + u_b}{2} \times (b-a+1)$	Si $q \neq 1$ $S = (1^e \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$ $S = u_a \frac{1-q^{b-a+1}}{1-q}$

Calcul du nombre de termes

nb de termes = (dernier indice) − (premier indice) + 1

IV) Rédaction d'un raisonnement par récurrence

Notons $P(n)$ la propriété telle que :
Montrons cette propriété par récurrence sur $n \in$.

Initialisation : Pour $n =$, on a

Donc la propriété est vraie au rang $n =$.

Hérédité : Soit $n >$. On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie pour n et on cherche à montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.

On peut poser notre hypothèse de récurrence : (HR) :

On a

Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : La propriété est vraie au rang $n =$ et est héréditaire.
Donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \in$.

V) Limites de suites

1. Suites monotones

- Une suite **croissante** et **majorée** converge.
- Une suite **décroissante** et **minorée** converge.
- Une suite **croissante** et **non majorée** diverge (donc sa limite est $+\infty$).
- Une suite **décroissante** et **non minorée** diverge (donc sa limite est $-\infty$).

2. Suites géométriques

Si (u_n) est une suite géométrique, alors :

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = u_0$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leqslant -1$, alors q^n n'a pas de limite, et donc u_n n'a pas de limite.

3. Théorèmes de comparaison et théorème des gendarmes

- Si $u_n \geqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $u_n \leqslant v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.
- Si $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.
  Ce théorème est appelé « Théorème des gendarmes ».