

1^{ère}

S

Fonctions composées (associées)

Exemples rédigés

Méthode

- On décompose la fonction en « blocs » simples,
- On applique les règles de composition de droite à gauche

Exemple

Soit $f: x \mapsto \sqrt{x-2}$

f est définie sur $[2; +\infty[$.

Au brouillon : f , c'est $\sqrt{\boxed{\text{de}} x-2}$.

On pose $g(x) = \sqrt{x}$ et $h(x) = x-2$

On a donc $f = g \circ \boxed{h}$.

On sait que h est croissante sur $[2; +\infty[$.

On sait que composer par $x \mapsto \sqrt{x}$ ne change pas le sens de variation.

Donc $g \circ h$ est croissante sur $[2; +\infty[$.

⚠ à l'ordre quand on décompose en blocs !

Exemple n°2

Soit $f: x \mapsto -\frac{2}{3x}$. f est définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$.

⚠ On cherche toujours les variations sur un intervalle, donc un ensemble « sans trou ».

Sur $] 0; +\infty[$:

Au brouillon: f , c'est $-\frac{2}{3} \boxed{\times} \frac{1}{x}$.

On pose $g(x) = -\frac{2}{3}$ et $h(x) = \frac{1}{x}$.

On a $f = g \boxed{\times} h$.

On sait que h est décroissante sur $] 0; +\infty[$.

Or, multiplier par une constante négative change le sens de variation.

Donc $g \times h$ est croissante

On en conclut que f est croissante sur $] 0; +\infty[$.

Remarque: Le résultat est le même sur $] -\infty; 0[$.

Exemple n°3 : un peu plus long...

Soit $f: x \mapsto -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+1}+8}$, définie sur $\mathbb{R}$.

On s'intéresse aux variations de f sur $[0; +\infty[$.

brouillon : on a f , c'est $-\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+8}$,
donc $-\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{\dots} \text{ et } \sqrt{x^2+1}+8 \right)$

donc $-\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{\dots} \text{ et } \left(\sqrt{x^2+1} \text{ et } 8 \right) \right)$
donc $-\sqrt{3} \times \left(\frac{1}{\dots} \text{ et } \left(\sqrt{} \text{ et } x^2+1 \right) \text{ et } 8 \right)$

On pose $\begin{cases} g: x \mapsto \sqrt{3} \\ h: x \mapsto \frac{1}{x} \\ i: x \mapsto \sqrt{x} \end{cases}$ et $\begin{cases} j: x \mapsto x^2+1 \\ k: x \mapsto 8 \end{cases}$

On a $f = g \circ (h \circ (i \circ j) + k)$

⚠ Quand il y a des parenthèses, elles sont prioritaires!
Mais on va toujours de droite à gauche.

On sait que $j: x \mapsto x^2+1$.

Or, la composition par $x \mapsto \sqrt{x}$ ne modifie pas le sens de variation. Donc $i \circ j$ est croissante.

Or, ajouter une constante à une fonction ne change pas son sens de variation.

Donc $(i \circ j) + k$ est croissante.

Or, la composition par $x \mapsto \frac{1}{x}$ inverse le sens de variation.

Donc $h \circ ((i \circ j) + k)$ est décroissante.

Or, la multiplication par une constante négative change le sens de variation.

Donc $g \circ (h \circ ((i \circ j) + k))$ est croissante.

On en conclut que f est croissante.