Pourcentages

1 Notion de proportion

Une proportion est un nombre qui représente une quantité par rapport [1] à une autre.
La proportion d'une quantité par rapport à un total est la donnée du rapport de cette quantité sur le total, c'est-à-dire : $\frac{\text{quantité}}{\text{total}}$.

Exemple : Si on note n_f le nombre de filles dans une classe de 26 élèves, alors la proportion de filles dans cette classe est de $\frac{n_f}{26}$.

2 Pourcentage

Définition Un pourcentage, c'est une quantité par rapport à 100.
Ainsi, t % se traduit mathématiquement par $\frac{t}{100}$.

Méthode : calcul d'un pourcentage Pour calculer le pourcentage de quelque chose, on multiplie la quantité par le *pourcentage traduit.*

Exemple : Soit une somme d'argent p. Calculer les 10 % de p revient à : $p \times \frac{10}{100}$.

Définitions : augmentation / diminution Si un prix augmente d'un certain pourcentage, on lui *ajoute son pourcentage.*
Une diminution est une augmentation négative.

Définition : coefficient multiplicateur Le coefficient multiplicateur est le nombre par lequel on multiplie une quantité pour appliquer une augmentation / une division.
Traduire une évolution de t % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Remarque t peut-être positif (pourcentage augmentation) ou négatif (pourcentage de diminution)

3 Traduction d'énoncés

Une variation se traduit par l'égalité :
$\text{QUANTITE}_{\text{DEPART}}\left(1 + \frac{t}{100}\right) = \text{QUANTITE}_{\text{ARRIVEE}}$.

On connaîtra toujours deux des trois nombres inconnus dans l'équation précédente.

Des variations plus complexes où l'on applique *n fois un même pourcentage* seront représentées par :

$$\text{QUANTITE}_{\text{DEPART}}\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n = \text{QUANTITE}_{\text{ARRIVEE}}.$$

1. un rapport correspond à une division, un quotient

Pourcentages
Exemples rédigés

1 Exercice n° 1

En connaissance les cases écrites en noir, déterminer la valeur de la case manquante (corrigée en rouge).

Prix HT en €	TVA en %	Prix TTC en €	Coefficient multiplicateur
140	5,5	$147,70$	$\times 1,055$
1500	19,6	1794	$: 1,196$
1450	33	1928,50	$1,33$

Même consigne...

Ancien prix en €	réduction en %	Nouveau prix en €	Coefficient multiplicateur
220	15	187	$\times 0,85$
1790	35	1163,50	$: 0,65$
12300	$0,1$	12287,70	$0,99$

Ainsi, on peut dire que :

* Ajouter 12 % à p revient à dire que : $p + \frac{12}{100}p = p + 0,12p = p\,(1 + 0,12) = 1,12p$.
* Retrancher 12 % à p revient à dire que : $p - \frac{12}{100}p = p - 0,12p = p\,(1 - 0,12) = 0,88p$.

Il est utile de savoir calculer un pourcentage d'évolution (surtout en SES !). Le pourcentage d'évolution se calcule ainsi :

Soient V_D la valeur de départ et V_A la valeur d'arrivée.

$V_A = V_D\left(1 + \frac{t}{100}\right)$ (cf fiche de cours)

$1 + \frac{t}{100} = \frac{V_A}{V_D}$ (en divisant par V_D chaque membre)

$\frac{t}{100} = \frac{V_A}{V_D} - 1$ (en soustrayant 1)

$\frac{t}{100} = \frac{V_A - V_D}{V_D}$ (en mettant sous le même dénominateur)

$$\boxed{t = \frac{V_A - V_D}{V_D} \times 100}$$

En reprenant le premier tableau à la troisième ligne, on peut dire que :

$t = \frac{1928,50 - 1450}{1450} \times 100 = 33$. Le prix a donc augmenté de 33 %.

Puis, avec le second tableau, à la troisième ligne :

$t = \frac{12287,70 - 12300}{12300} \times 100 = -0,1$. Le prix a donc diminué de 0,1 %.

2 Exercice n^{o} 2 : prix et taxe sur la valeur ajoutée

Première partie

Un prix p augmente de 20 % puis de 10 %.

A-t-il augenté de 30 % ?

* Prix initial : p
* Prix intermédiaire : $1,2p$
* Prix final : $1,1 \times 1,2p = 1,32p$.

p a donc augmenté de 32 %.

Deuxième partie

Un prix p diminue de 20 % puis de 10 %.

A-t-il diminué de 30 % ?
A-t-il diminué de 32 % ?

* Prix initial : p
* Prix intermédiaire : $0,8p$
* Prix final : $0,9 \times 0,8p = 0,72p$.

p a donc diminué de 28 %.

Troisième Partie

Un prix p augmente de 10 % puis diminue de 10 %.

p est-il revenu au prix initial ?

* Prix initial : p
* Prix intermédiaire : $1,1p$
* Prix final : $0,9 \times 1,1p = 0,99p$.

p a donc diminué de 1 %.

3 Exercice n° 3 : question de point de vue...

3.1 Première partie

Vous achetez un objet (de valeur) chez un commerçant. Celui-ci propose :

* Une réduction de 10 % sur le prix HT puis l'application de la TVA à $19,6$ %.
* Une réduction de 10 % sur le prix TTC.

Quelle option doit-on choisir ?

	Option A	Option B
Prix initial	p	p
Prix intermédiaire	$0,9p$	$1,196p$
Prix final	$1,196 \times 0,9p = 1,0764p$	$1,196 \times 0,9p = 1,0764p$

Le choix est indifférent pour le client.

3.2 Remarque importante

On peut cependant remarquer que choix n'est pas indifférent au commerçant !
Exemple

Un objet à 10 000 € :

	Option A	Option B
Client	10764	10764
Commerçant	9000	8804
État	1764	1960

Le commerçant préfèrera donc l'option A.

4 Exercice n° 4 : pourcentage et ordre

Un produit A coûte 25 % plus cher qu'un produit B.

Le produit B coûte-t-il 25 % moins cher que le produit A ?

Soient p_A le prix du produit A et p_B le prix du produit B.

$p_A = p_B \times 1,25$

$p_B = \dfrac{p_A}{1,25}$

$p_B = p_A \times \dfrac{1}{1,25}$

$p_B = p_A \times 0,8$

Donc, le produit B coûte 20 % moins cher que le produit A.

5 Exercice n° 5

Le taux de TVA dans la restauration était de 19,6 %. Ce taux a été baissé à 5,5 %.

Les prix ont-ils donc baissé de 14,1 % ?

Soit p le prix HT. Le prix avec l'ancienne TVA est $p_A = 1,196p$ et le prix avec la nouvelle TVA est $p_N = 1,055p$.

On a donc $\begin{cases} p_A = 1,196p \\ p_N = 1,055p \end{cases}$. Ainsi :

$p_N = p \times 1,055$

$p_N = \dfrac{p_A}{1,196} \times 1,055$

$p_N = p_A \times \dfrac{1,055}{1,196}$

$p_N \approx p_A \times 0,882$

Les prix auraient donc dû baisser de 11,8 %

Vérification
On dit que $p = 10€$

$t = \dfrac{10,55 - 11,96}{11,96} \times 100 = -11,8\ \%$

6 Exercice n° 6

On place de l'argent à un taux de 1 % par mois, le taux est-il de 12 % par an ?

Soient p la somme d'argent initiale, p' la somme d'argent au bout d'un mois, et p'' la somme d'argent au bout de 2 mois.

Placement initial	p
Placement au bout d'un mois	$p' = 1,01p$
Placement au bout de deux mois	$p'' = p' \times 1,01 = 1,01 \times 1,01 \times p = 1,01^2 \times p$
...	
Placement au bout de 12 mois	$p \times 1,01^{12} = 1,1268p$

Le placement a donc augmenté de 12,68 %.

Exercices plus difficiles...

7 Exercice n° 7 : Moyenne de pourcentages

Le prix p d'un objet augmente de 20 % la première année puis de 10 % la deuxième année.
p a-t-il augmenté en moyenne de 15 % ?

Soit t le pourcentage recherché.

Réalité	En moyenne, mathématiquement
Prix initial : p	Prix initial : p
Au bout d'un an : $p \times 1,20$	$p\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$
Au bout de deux ans : $(p \times 1,20) \times 1,1 = p \times 1,32$	$\left[p\left(1+\dfrac{t}{100}\right)\right]\left(1+\dfrac{t}{100}\right) = p\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2$

Il vient : $p\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2 = p \times 1,32$

D'où $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2 = 1,32$

$1+\dfrac{2t}{100}+\dfrac{t^2}{10000} = 1,32$

$\dfrac{t^2}{10000}+\dfrac{2t}{100} - 0,32 = 0$

$t^2 + 200t - 3200 = 0$

$t = -214,89$ ou $t = 14,89$

Or, $t = -214,89$ ne convient pas, car t est un pourcentage d'augmentation, donc $t \in [0\ ;\ 100]$.

Ainsi, une augmentation de 20 % suivie d'une augmentation de 10 % est à peu près équivalente à une augmentation de 14,89 % suivie d'une autre augmentation de 14,89 %.

8 Exercice n° 8

Un véhicule dont le prix initial étaient de 12000 €) subi une première baisse de t % puis une seconde baisse de t %. Son prix est maintenant de $10267,50$ %. Déterminer t.

Prix initial :	12000
Prix intermédiaire :	$12000\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$
Prix final :	$12000\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2$

Il vient $12000\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2 = 10267,50$

$$12000\left(1+\frac{2t}{100}+\frac{t^2}{10000}\right) = 10267,50$$

$$12000+\frac{24000t}{100}+\frac{12000t^2}{10000} = 10267,50$$

$$\frac{12000t^2}{10000}+\frac{24000t}{100}+1732,50 = 0$$

$$12000t^2+2400000t+17325000 = 0$$

$$t = \frac{-385}{2} \text{ ou } t = -\frac{15}{2}$$

Or, $t = \dfrac{-385}{2}$ ne convient pas, car t est un pourcentage de diminution, donc $t \in [-100\ ;\ 0]$.

D'où $t = -7,5$. Le prix de la voiture a donc baissé de 7,5 %.

9 Exercice n° 9

Sylvain place de l'argent sur un compte rémunéré à t % pendant deux ans. La première année, il place 3 000 €, puis la seconde, il place 2 000 €.
Le capital de Sylvain s'élève à $5407,50$ € au bout de ces 2 années.
Déterminer t.
On veut résoudre l'équation : $3000\left(1+\dfrac{t}{100}\right)^2+2000\left(1+\dfrac{t}{100}\right) = 5407,5$

$$3000\left(1+\frac{2t}{100}+\frac{t^2}{10000}\right)+2000+\frac{2000t}{100} = 5407,5$$

$$3000+60t+0,3t^2+2000+20t-5407,5 = 0$$

$$0,3t^2+80t-407,5 = 0$$

$$t = 5 \text{ ou } t = -\frac{815}{3}$$

Or, t est un pourcentage de placement, donc un pourcentage d'augmentation.
Donc $t = -\dfrac{815}{3}$ ne convient pas, car $t \in [0\ ;\ 100]$.

Ainsi, le taux de placement sur le compte de Sylvain est de 5 %.