Montrer par récurrence que...

(I) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(II) Pour (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.

(III) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

(IV) $\forall n \geq 1, 3^n \geq 1 + 2n$

(V) Pour (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{3v_n + 7} \end{cases}$

La suite (v_n) est croissante.

(VI) Pour (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n + 3 \end{cases}$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = -\frac{5}{2^n} + 6$.