3 Corrigés

3.1 Exercice n° 1

a) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = a_n - 0,8$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } u_{n+1} &= a_{n+1} - 0,8 \\ &= (0,5a_n + 0,4) - 0,8 \\ &= 0,5a_n - 0,4 \end{aligned}$$

Or, on a $u_n = a_n - 0,8 \Longleftrightarrow a_n = u_n + 0,8$

$$\begin{aligned} \text{D'où } u_{n+1} &= 0,5\,(u_n + 0,8) - 0,4 \\ &= 0,5u_n + 0,4 - 0,4 \\ &= 0,5u_n \end{aligned}$$

Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $u_0 = a_0 - 0,8 = 0,5 - 0,8 = -0,3$.

b) (u_n) est une suite géométrique, donc son terme général est de la forme $u_n = u_1 q^{n-1}$.
D'où $u_n = -0,3 \times (0,5)^{n-1}$.

Or, on a $a_n = u_n + 0,8$.
D'où $a_n = -0,3 \times (0,5)^{n-1} + 0,8$
On a bien $a_n = 0,8 - 0,3 \times (0,5)^{n-1}$.

c) On a $0 < 0,5 < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^{n-1} = 0$.

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0,8$.

3.2 Exercice n° 2

a) On a $u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$ et $w_n = u_n - 0,6$.

$$\begin{aligned} \text{D'où } w_{n+1} &= u_{n+1} - 0,6 \\ &= 0,75u_n + 0,15 - 0,6 \\ &= 0,75u_n - 0,45 \end{aligned}$$

Or, $w_n = u_n - 0,6 \Longleftrightarrow u_n = w_n + 0,6$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } w_{n+1} &= 0,75\,(w_n + 0,6) - 0,45 \\ &= 0,75w_n + 0,45 - 0,45 \\ &= 0,75w_n \end{aligned}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 0,6 = -0,15$.

b) (w_n) est une suite géométrique, donc l'expression de son terme général est $w_n = w_0 \times q^n$.

D'où $w_n = -0,15 \times (0,75)^n$. Or, on a $u_n = w_n + 0,6$.

D'où $u_n = -0,15 \times (0,75)^n + 0,6$. On a $0 < 0,75 < 1 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} 0,75^n = 0$.

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0,6$.

3.3 Exercice n° 3

1. - $u_0 = 10$
   - $u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 3 = 5 - 3 = 2$
   - $u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 3 = 1 - 3 = -2$
   - $u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 3 = -1 - 3 = -4$
   - $u_4 = \frac{1}{2}u_3 - 3 = -2 - 3 = -5$

2. Étudions v_{n+1}

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} & = & u_{n+1} + 6 \\ & = & \left(\frac{1}{2}u_n - 3\right) + 6 \\ & = & \frac{1}{2}u_n + 3 \\ & = & \frac{1}{2}(v_n - 6) + 3 \\ & = & \frac{1}{2}v_n - 3 + 3 \\ & = & \frac{1}{2}v_n \end{array}$$

   Donc $(v_n)_{v\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 + 6 = 10 + 6 = 16$ et de raison $q = \frac{1}{2}$

3. On $v_n = v_0 \times q^n$, donc $v_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

   On a $u_n = v_n - 6$, donc $u_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 6$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, car $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, et $0 < q < 1$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -6$, car $u_n = v_n - 6$

3.4 Exercice n° 4

1. • $u_0 = 10$

   • $u_1 = -\frac{1}{2}u_0 + 3 = -5 + 3 = -2$

   • $u_2 = -\frac{1}{2}u_1 + 3 = 1 + 3 = 4$

   • $u_3 = -\frac{1}{2}u_2 + 3 = -2 + 3 = 1$

   • $u_4 = -\frac{1}{2}u_3 + 3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{2}$

2. Étudions v_{n+1}

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}u_n + 3\right) - 2 \\ &= -\frac{1}{2}u_n + 1 \\ &= -\frac{1}{2}(v_n + 2) + 1 \\ &= -\frac{1}{2}v_n - 1 + 1 \\ &= -\frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

   Donc $(v_n)_{v\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 10 - 2 = 8$ et de raison $q = -\frac{1}{2}$

3. On $v_n = v_0 \times q^n$, donc $v_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

   On a $u_n = v_n + 2$, donc $u_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$

4. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, car $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$, et $-1 < q < 0$

   $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$, car $u_n = v_n + 2$