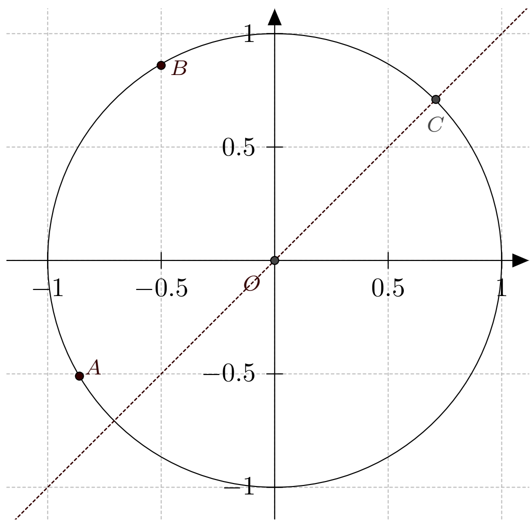
Exercices de trigonométrie

Exercice 1.

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

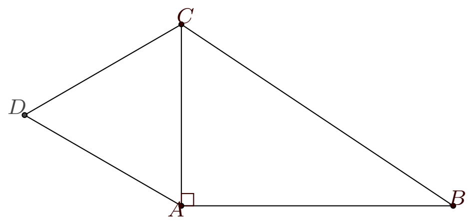
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$. On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.



1. Déterminer tous les réels de l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$ associés aux points A, B et C.

2. Déterminer la mesure principale de l'angle de mesure $\alpha = -\dfrac{23\pi}{3}$ et placer sur le cercle ci-dessus le point E associé.

3. ABC est un triangle rectangle en A direct tel que $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$. ACD est un triangle équilatéral direct.



   Déterminer, en justifier, la mesure principale de :

   a) $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)$
   b) $\left(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$
   c) $\left(\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$

Exercice 2. Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. Soit $A = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) - \sin(4\pi - x) + \sin(\pi + x)$, avec x un nombre réel.

   Exprimer A en fonction de $\cos x$ et/ou de $\sin x$, en détaillant les calculs.

2. Simplifier $B = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$.

3. a) Développer $\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2$.

   b) On admet que $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Justifier que $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

   c) Donner les valeurs exactes de $\cos\dfrac{11\pi}{12}$, $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{71\pi}{12}$.

Exercice 3. On notera S_I l'ensemble des solutions d'une équation dans l'intervalle I.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

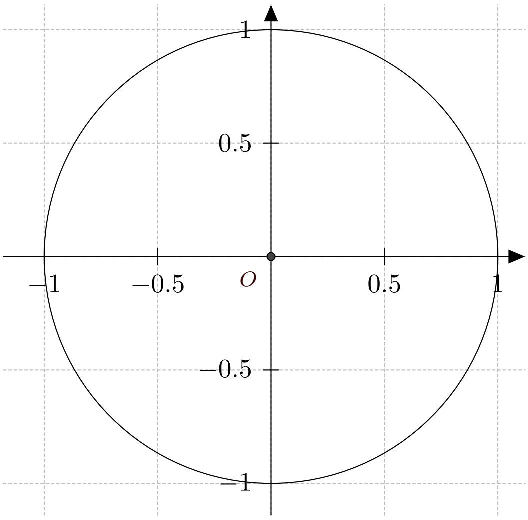
   a) $2\sin x = \sqrt{3}$.

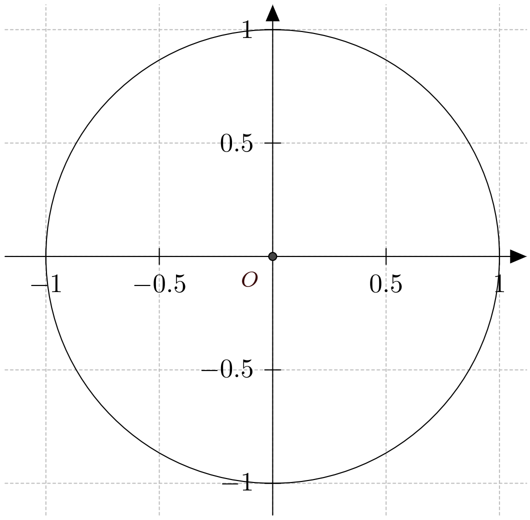
   b) $\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$

   c) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x - 3 = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E), représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométrique ci-dessous et en déduire les solutions de (E) dans $[0\ ;\ 2\pi]$ dans chacun des 2 cas suivants :

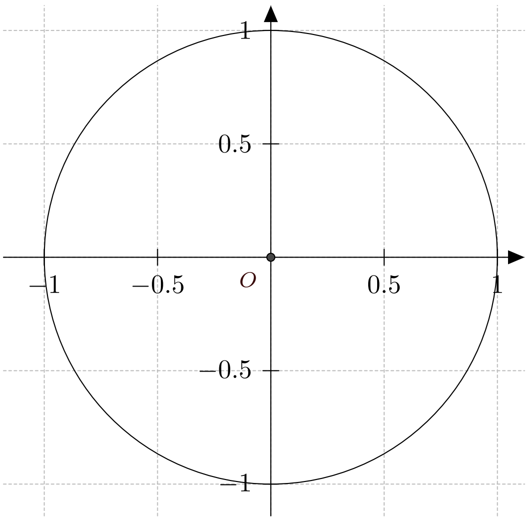
   a) $(E) : \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$ **b)** $(E) : \cos(3x) = \sin x$

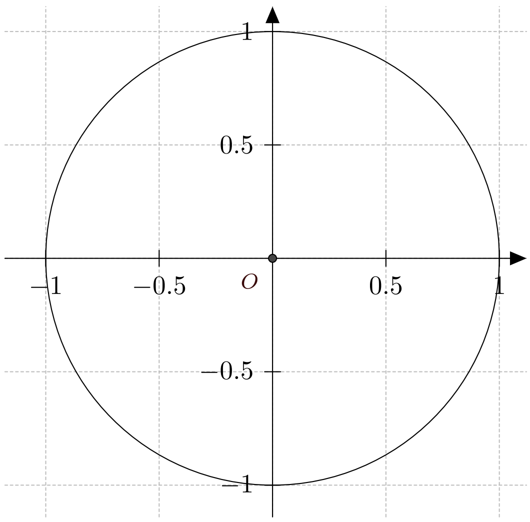




Exercice 4. Résoudre dans $]-\pi\ ;\ \pi]$ les inéquations suivantes et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique ci-dessous.

1. $\sin x > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **2.** $\cos x \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$





Exercice 5. Résoudre l'équation trigonométrique suivante dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$: $\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 6. Soit a un nombre réel compris entre $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{2}$ tel que $\sin a=\dfrac{4}{5}$.

1. Placer l'image de a sur un cercle trigonométrie **convenablement choisi**.
2. Déterminer par le calcul $\cos a$.

Exercice 7.

1. Placer en justifiant sur un cercle trigonométrique A, B, C et D, images respectives de : $\dfrac{2619\pi}{2}$ $\dfrac{2620\pi}{3}$ $\dfrac{2621\pi}{6}$ $\dfrac{2623\pi}{4}$
2. Complétez le tableau ci-contre, sans justifier :

x	$\dfrac{2619\pi}{2}$	$\dfrac{2620\pi}{3}$	$\dfrac{2621\pi}{6}$	$\dfrac{2623\pi}{4}$
$\cos x$				
$\sin x$				