Mathématiques Année 2016-2017
1ère S **feuille n° 3**

Exercices pour le 28 janvier 2017

1 Trigonométrie

Exercice 1.

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

1. Soit $A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(\pi - x) - \sin(4\pi - x) + \sin(\pi + x)$, avec x un nombre réel.

   Exprimer A en fonction de $\cos x$ et/ou de $\sin x$, en détaillant les calculs.

2. Simplifier $B = (\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$.

3. a) Développer $\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2$.

   b) On admet que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Justifier que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

   c) Donner les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$, $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{71\pi}{12}$.

Exercice 2. Soit a un nombre réel compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ tel que $\sin a = \frac{4}{5}$.

1. Placer l'image de a sur un cercle trigonométrie **convenablement choisi**.
2. Déterminer par le calcul $\cos a$.

Exercice 3.

1. Placer en justifiant sur un cercle trigonométrique A, B, C et D, images respectives de :

   $\frac{2619\pi}{2}$ $\frac{2620\pi}{3}$ $\frac{2621\pi}{6}$ $\frac{2623\pi}{4}$
2. Complétez le tableau ci-contre, sans justifier :

x	$\frac{2619\pi}{2}$	$\frac{2620\pi}{3}$	$\frac{2621\pi}{6}$	$\frac{2623\pi}{4}$
$\cos x$				
$\sin x$				

2 Trinômes du second degré

Exercice 4.

1. Résoudre l'équation $16x^2 - 24x + 9 = 0$.
2. Résoudre l'équation $4x^2 - 27x + 18 = 0$.
3. Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x) = \dfrac{16x^2 - 24x + 9}{4x^2 - 27x + 18}$.
   a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Simplifier $f(x)$.

Exercice 5.

1. Résoudre l'inéquation $(-3x^2 - 38x + 13)(6x^2 + 23x - 78) \leq 0$.
2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{-3x^2 - 38x + 13}{6x^2 + 23x - 78} \geq 0$.

3 Vecteurs et droites du plan

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x$ et C la courbe représentative de f.

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse -1.
2. Déterminer les coordonnées des points de la courbe C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x - 5$.

Exercice 7. Soit ABCD un parallélogramme.
Soient les points P, Q, R, S définis par : $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CR} = 2\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DS} = 2\overrightarrow{DA}$.

1. * Exprimer $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$.
   * Exprimer $\overrightarrow{SR}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que $PQRS$ est un parallélogramme.

Exercice 8. Soit ABC un triangle tel qu'il est donné dans la feuille annexe.

1. Contruire les points I, J et K tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CK} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
2. * Exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
   * Exprimer $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$.
3. Montrer que les points I, J et K sont alignés.

4 Suites

Exercice 9.

1. Calculer $S_1 = 5 + 12 + 19 + 26 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + 2336$.

2. Calculer $S_2 = 7 + 35 + 175 + 875 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + 109375$.

On cherchera à montrer que S_1 et S_2 sont deux sommes des termes d'une suite arithmétique ou géométrique que l'on déterminera. Puis, on calculera cette somme.

Exercice 10. Un propriétaire a proposé à partir du 1$^{\text{er}}$ janvier 2001 (notée année 1) un appartement dont le montant annuel de loyer est, la première année, de 12 000 euros.
Il a envisagé deux types d'augmentation :

Première partie : Dans le premier cas, le loyer annuel augmente de 420 euros chaque 1$^{\text{er}}$ janvier.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   On a : $u_1 = 12000$. On calculera u_2 et u_3.
   Quelle sorte de suite est la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
2. Quel sera le montant annuel du loyer en 2014 ?
3. En quelle année le loyer dépassera-t-il une fois et demie le montant de la première année ?
4. Quelle sera la somme perçue par le propriétaire au terme des vingts premières années ?

Seconde partie : Dans le second cas, le loyer annuel augmente chaque 1$^{\text{er}}$ janvier de 3 %.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   On a : $v_1 = 12000$. On calculera v_2 et v_3.
   Quelle sorte de suite est la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
2. Quel sera le montant annuel du loyer en 2014, arrondi à l'euro près ?
3. En quelle année le loyer dépassera-t-il une fois et demie le montant de la première année ?
4. Quelle sera la somme perçue par le propriétaire au terme des vingts premières années ?
   On arrondira le résultat à l'euro près.

Exercice 11. Chaque année, la grand-mère de Sylvain a déposé de l'argent dans une tirelire afin de constituer une cagnotte pour son petit-fils.
Elle a commencé le 1$^{\text{er}}$ janvier 2002 par un dépôt de 500 euros.
Depuis lors, elle a effectué un dépôt dans la tirelire, chaque 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2002 + n$.
On a donc $u_0 = 500$.
On note S_n le montant, exprimé en euros, de la somme contenue dans la tirelire après le dépôt du 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2002 + n$. On a donc $S_0 = 500$.

1. a) Déterminer u_1 et u_2, puis exprimer u_n en fonction de n.
   b) Déterminer S_1 et S_2, puis exprimer S_n en fonction de n.
   c) Le 1$^{\text{er}}$ janvier 2022, la grand-mère de Sylvain effectuera son dépôt habituel, puis offrira la tirelire à son petit-fils. Quel sera le montant de la somme perçue par Sylvain ?

Avec le cadeau de sa grand-mère, Sylvain effectuera quelques achats, puis ouvrira un compte bancaire et y placera la plus grand partie de la somme qu'il a reçue.
En fait, il place 20000 euros, à intérêts composés, au taux annuel de 6%.

On note c_n le montant, exprimé en euros, du capital disponible sur le compte bancaire de Sylvain après n années de placement.

2. a) Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison. Puis, on exprimera c_n en fonction de n.
   b) Combien d'années, au minimum, Sylvain devra-t-il attendre pour disposer d'une somme de 30000 sur son compte bancaire ?

5 Dérivées

Exercice 12. [Nombre dérivé de la fonction carrée]

$$\text{Soit } f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Exercice 13. [Nombre dérivé d'une fonction trinôme du second degré]

$$\text{Soit } f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 - 2x - 3 \end{array}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Exercice 14. [Nombre dérivé de la fonction inverse]

$$\text{Soit } f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Exercice 15. [Nombre dérivé d'une fonction homographique]

$$\text{Soit } f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Exercice 16. [Nombre dérivé de la fonction racine carrée]

$$\text{Soit } f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Exercice 17. [Nombre dérivé d'une fonction irrationnelle]

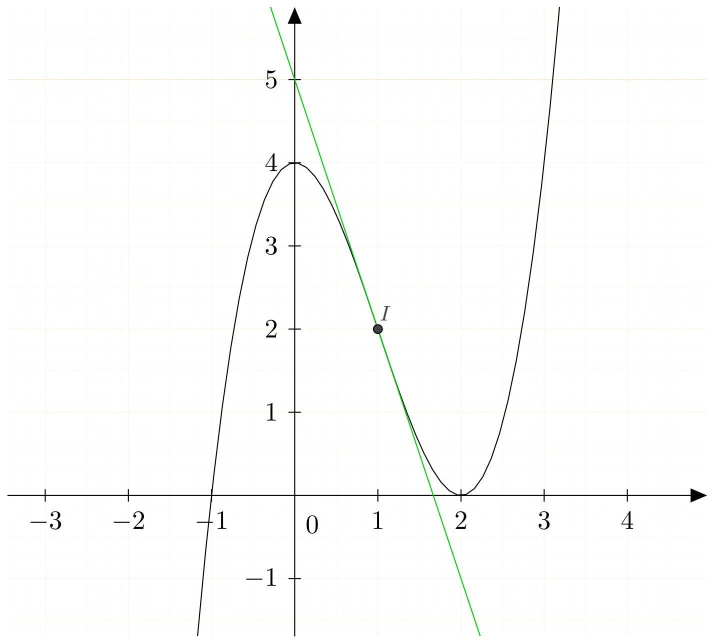
Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x+11} - 1 \end{array}$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Exercice 18. [Équation de tangente]

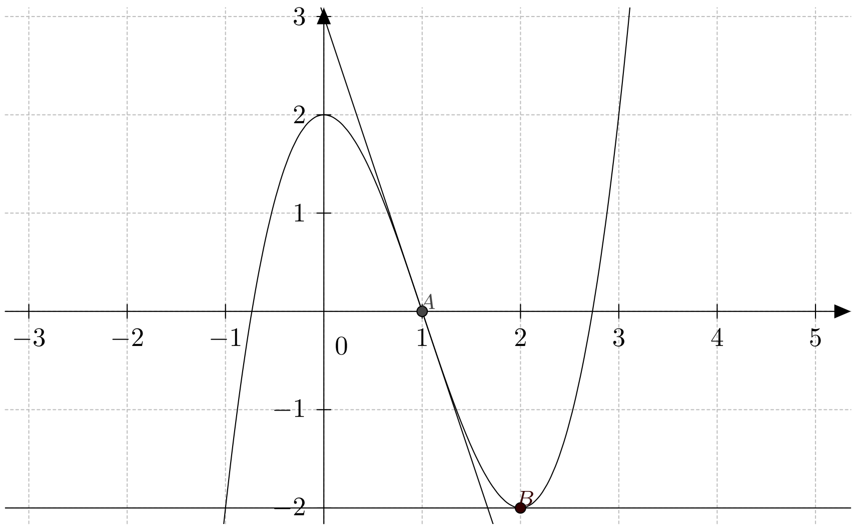
Soit la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \end{array}$

On a $D_f = \mathbb{R}$.



Déterminer l'équation de la tangente au point $I(1, 2)$.

Exercice 19. La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note A et B deux points de cette courbe de coordonnées respectives : $A\,(1\ ;\ 0)$ et $B\,(2\ ;\ -2)$.
On appelle T_1 et T_2 les tangentes à la courbe, respectivement en A et en B.



a) Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$.
b) Déterminer une équation de la droite T_1.