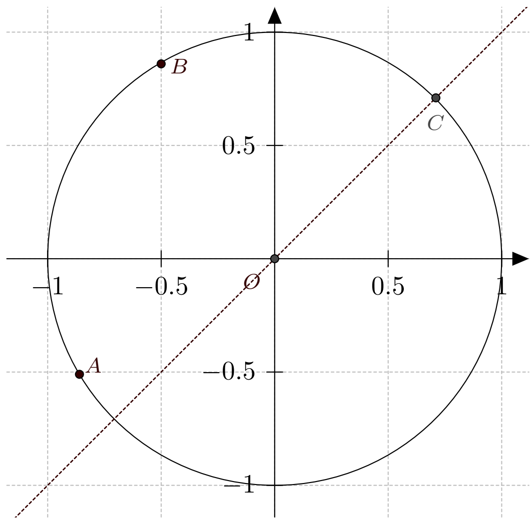
Exercices pour le 21 janvier 2017

1 Trigonométrie

Exercice 1.

Les questions 1., 2. et 3. sont indépendantes.

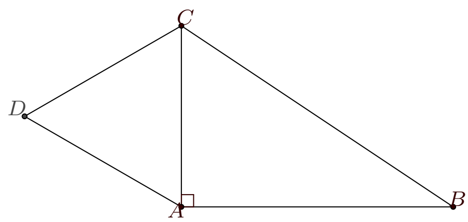
Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$. On considère le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O.



1. Déterminer tous les réels de l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$ associés aux points A, B et C.

2. Déterminer la mesure principale de l'angle de mesure $\alpha = -\dfrac{23\pi}{3}$ et placer sur le cercle ci-dessus le point E associé.

3. ABC est un triangle rectangle en A direct tel que $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$. ACD est un triangle équilatéral direct.



   Déterminer, en justifier, la mesure principale de :

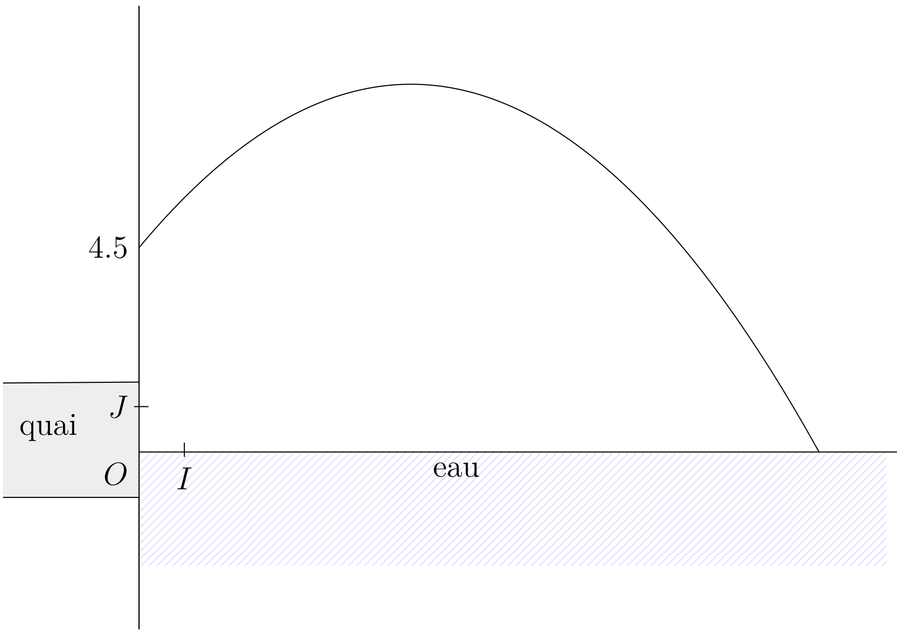
   a) $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right)$
   b) $\left(\overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$
   c) $\left(\overrightarrow{DC}\ ;\ \overrightarrow{AC}\right)$

Exercice 2. Faire les 10 feuilles de formules de trigonométrique (formules de transformation).

Exercice 3. S'entraîner à connaître les sinus et cosinus principaux.

2 Trinômes du second degré

Exercice 4. Depuis le bord d'un quai, un pêcher lance sa ligne. On observe, dans un repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ,\ \overrightarrow{j}\right)$ orthonormé, le parcours de l'hameçon avant de toucher l'eau.
On appelle $f(x)$ La hauteur de l'hameçon (en mètres, par rapport au niveau de la mer) en fonction de l'abscisse (en mètres).
Le parcours de l'hameçon est donné par $f(x) = -\dfrac{1}{10}x^2 + bx + c$, où b et c sont des réels. L'hameçon commence sa course à 4,5 mètres de hauteur (par rapport à l'eau) et il atteint sa hauteur maximale à 6 mètres du quai.
La courbe ci-dessous représente la trajectoire de l'hameçon :



1. Déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

2. Vérifier que $f(x) = -\dfrac{1}{10}(x-6)^2 + \dfrac{81}{10}$.

3. À quelle distance du quai l'hameçon percute-t-il la surface de la mer ? En déduire l'ensemble des valeurs prises par x.

4. Pour quelle distance du quai l'hameçon est-il à moins de 1,7 mètre de la mer ?

Exercice 5. Le plan est rapporté à un repère orthogonal. Pour tout m réel, on définit la droite D_m d'équation $y = 2x + m$.

On considère la parabole P d'équation $y = x^2 + 6x + 6$

1. Construire P en justifiant les coordonnées du sommet.
   Sur le même graphique, construire D_{-1}, D_2, D_4 et D_7 (c'est-à-dire les droites D_m pour $m = -1$, $m = 2$, $m = 4$ et $m = 7$.)

2. a) Montrer que les abscisses des éventuels points d'intersection sont les solutions de l'équation :$x^2 + 4x + (6 - m) = 0$.

b) En discutant le signe du discriminant de l'équation précédente selon les valeurs de m, déterminer le nombre de points d'intersection de la parabole P et de la droite D_m selon les valeurs de m.

3. Dans le cas où la parabole P et la droite D_m ont deux points d'intersection A et B, on note C le milieu de $[AB]$.

   a) Exprimer les coordonnées de A et B en fonction de m.

   b) Déterminer les coordonnées de C en fonction de m.

   c) Si m est strictement supérieur à 2, à quel ensemble (de points) appartient le point C ?

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels avec a non nul.
Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

Exercice 6 (Vrai ou Faux)**.**

1. Si, pour tout x réel, $f(x) < 0$, alors $\Delta < 0$.
2. Si $\Delta < 0$, alors, pour tout x réel, $f(x) < 0$.
3. Si le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ a deux racines opposées, alors $b = 0$.

3 Vecteurs du plan et équations de droites

Exercice 7. x étant un nombre réel, on définit les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(1\ ;\ 1)$, $(-2\ ;\ x)$, $(0\ ;\ 4)$, $(x\ ;\ 3)$.

Pour quelle(s) valeur(s) de x les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 8. $ABCD$ est un parallélogramme. On considère les point E, F et J tels que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DF} = -4\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CD}$. On appelle I le milieu du segment $[BD]$.

On munit le plan du repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\right)$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées des points B, C, D, E, F, I et J dans ce repère.
3. Démontrer que les droites (EF) et (IJ) sont parallèles.

Exercice 9. Soient les points $A(-2\ ;3)$ et $B(2\ ;\ -2)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).

Exercice 10.

a) Construire la droite Δ passant par $C(5\ ;\ -1)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b) Donner l'équation réduite de la droite Δ.

Exercice 11. Soit la droite D d'équation cartésienne : $3x + 2y + 7 = 0$.

a) Déterminer le coefficient directeur de la droite D.

b) Déterminer les coordonnées des deux points d'intersections de la droite D avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

c) Déterminer une équation cartésienne de la droite D' parallèle à D passant par $S\,(-1\ ;\ 5)$.

d) Soit D_1 la droite d'équation : $5x + \frac{10}{3}y + 9 = 0$.

Les droites D_1 et D sont-elles sécantes, strictement parallèles ou confondues ? Justifier.

4 Suites

Exercice 12. Le conseil municipal d'une station touristique de montagne a décidé de faire équiper une falaise afin de créer un site d'escalade. L'équipement doit se faire depuis le pied de la falaise. Deux entreprises spécialisées dans ce type de chantier ont été contactées et ont envoyé des devis. On se propose d'étudier ceux-ci :

- **Devis A** : Le premier mètre équipé coûte 100 € puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 20 € de plus que le mètre précédent (100 € pour équiper une falaise d'un mètre, $100+120 = 220$ € pour équiper une falaise de deux mètres, $100+120+140 = 360$ pour équiper une falaise de trois mètres, etc.)

- **Devis B** : Le premier mètre équipé coûte 50 € puis chaque mètre supplémentaire équipé coûte 5% de plus que le mètre précédent (50 € pour équiper une falaise d'un mètre, $50 + 52,50 = 102,50$ € pour équiper une falaise de deux mètres, $50 + 52,50 + 55,215 = 157,625$ € pour équiper une falaise de trois mètres, etc.)

On appelle u_n le prix d'un n-ième mètre équipé et S_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqué par l'entreprise A.
On appelle v_n le prix d'un n-ième mètre équipé et R_n le prix de l'équipement d'une falaise de n mètres de hauteur indiqué par l'entreprise B.

1. Exprimer u_n et S_n en fonction de n.

2. Exprimer v_n et R_n en fonction de n.

3. Calculer le prix à payer pour équiper une falaise de 92 mètres de hauteur avec chacune des deux entreprises. Préciser l'entreprise la moins chère. On arrondira les prix à l'euro près.

4. Le conseil municipal a décidé d'accorder un budget de 120 000 € pour équiper le site. Calculer la hauteur de la falaise qui peut être équipée avec cette somme par chacune des deux entreprises A et B (on arrondira les hauteurs au mètre près).

Exercice 13. Lors du Mondial de 1998, l'équipe de France de football a disputé 7 matches : 3 matches de poule, un huitième de final, un quart de finale, une demi-finale et la finale.
Dans un petit village de France de 600 habitants, 400 personnes ont regardé la première rencontre à la télévision.

Par la suite, on a constaté que :

- parmi toutes les personnes qui ont regardé un match, quatre seulement n'ont pas regardé le match suivant.
- parmi toutes les personnes qui n'ont pas vu un match, la moitié ont regardé le suivant.

On appelle u_n le nombre de personne ayant vu le $n^{\text{ème}}$.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3 et u_4.

2. Montrer que pour tout entier naturel n tel que $1 \leqslant n \leqslant 6$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 296$.
   On pourra utiliser le nombre de personnes qui n'ont pas vu le $n^{\text{ème}}$ match.

3. Soit $(v_n)\,1 \leqslant n \leqslant 7$ la suite définie par : $v_n = u_n - 592$.
   Montrer que $(v_n)\,1 \leqslant n \leqslant 7$ est une suite géométrique.
   Quel est son premier terme ? Quelle est sa raison ?

4. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

5. Quel est le nombre d'habitants du village qui n'ont pas vu la finale ?

Exercice 14. Sylvain a placé 2000 euros le 31 décembre 2002 sur son livret bancaire, à intérêts composés au taux annuel de $3,5$ %. À partir de l'année suivante, il a prévu de placer, chaque 31 décembre, 700 euros supplémentaires sur son livret.

On désigne par C_n le capital, exprimé en euros, disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année $2003 + n$.
On a donc $C_0 = 2000$.

1. Déterminer C_1, c'est-à-dire le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2004.
   Déterminer C_2, c'est-à-dire le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2005.
   Déterminer C_3, c'est-à-dire le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier de l'année 2006.

2. La suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
   Établir, pour tout entier n, la relation entre C_{n+1} et C_n.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = C_n + 20000$.
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   Quel est son premier terme ? Quelle est sa raison ?

4. Exprimer v_n en fonction de n.
   Montrer que, pour tout entier naturel n, $C_n = 22000 \times (1,035)^n - 20000$.

5. Déterminer le capital disponible le 1$^{\text{er}}$ janvier 2008 (on arrondira le résultat à l'euro près).

6. Le 1$^{\text{er}}$ janvier d'une certaine année, le capital initial de Sylvain aura quintuplé.

Quelle est cette année ?