Exemples rédigées
Résolution des équations du second degré

1 Avec les identités remarquables

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

1.1 Exemple n° 1

$x^2 - 9 = 0$

Rappel : En troisième, on a appris trois identités remarquables :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

On a donc $x^2 - 9 = 0 \iff (x+3)(x-3) = 0$.

Rappel : En troisième, on a appris si un produit est nul, au moins l'un de ses facteurs est nul.

D'où $(x+3)(x-3) = 0 \iff x+3 = 0$ ou $x-3 = 0$
$\iff x = -3$ ou $x = 3$

Ainsi, $\text{S} = \left\{-3\,;\,3\right\}$.

1.2 Exemple n° 2

$$\begin{aligned} 9x^2 - 5 = 0 &\iff \left(3x+\sqrt{5}\right)\left(3x-\sqrt{5}\right) = 0 \\ &\iff 3x+\sqrt{5} = 0 \text{ ou } 3x-\sqrt{5} = 0 \\ &\iff 3x = -\sqrt{5} \text{ ou } 3x = \sqrt{5} \\ &\iff x = \frac{-\sqrt{5}}{3} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

D'où $\text{S} = \left\{\frac{-\sqrt{5}}{3}\,;\,\frac{\sqrt{5}}{3}\right\}$.

1.3 Exemple n° 3

$$\begin{aligned} x^2 - 14x + 49 = 0 &\iff (x-7)^2 = 0 \\ &\iff (x-7)(x-7) = 0 \\ &\iff x-7 = 0 \text{ ou } x-7 = 0 \\ &\iff x = 7 \text{ ou } x = 7 \end{aligned}$$

D'où $\text{S} = \left\{7\right\}$.

1.4 Exemple n° 4

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 = 0 &\iff (x+1)^2 = 0 \\ &\iff (x+1)(x+1) = 0 \\ &\iff x+1 = 0 \text{ ou } x+1 = 0 \\ &\iff x = -1 \text{ ou } x = -1. \end{aligned}$$

D'où $\text{S} = \left\{-1\right\}$.

N.B. : Ces ensembles de solution sont des **singletons**, bien que l'équation soit une équation du second degré. Cette solution est en fait une **solution double**.

1.5 Exemple n° 5

$x^2 + 36 = 0 \iff x^2 = -36$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$.

D'où $\text{S} = \emptyset$.

1.6 Exemple n° 6

$17x^2 + 13 = 0 \iff 17x^2 = -13$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, ax^2 \geqslant 0$.

D'où $\text{S} = \emptyset$.

2 Avec le discriminant

2.1 Exemple n° 1 : cas où Δ est un carré parfait[1]

$x^2 - 14x - 32 = 0$

On a $a = 1$, $b = -14$, $c = -32$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 196 - 4 \times (-32) = 196 + 128 = 324 = 18^2$.

$\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} && \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\\
x_1 &= \frac{14 - 18}{2} && \text{ou} \quad x_2 = \frac{14 + 18}{2}\\
x_1 &= \frac{-4}{2} && \text{ou} \quad x_2 = \frac{32}{2}\\
x_1 &= -2 && \text{ou} \quad x_2 = 16
\end{aligned}
$$

D'où $S = \left\{ -2\,;\, 16 \right\}$.

2.2 Exemple n° 2 : cas où Δ est un carré parfait et $a \neq 1$

$36x^2 + 84x - 95 = 0$

On a $a = 36$, $b = 84$ et $c = -95$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 7056 - 4\,(36 \times (-95)) = 7056 + 13680 = 20736 = 144^2$.

$\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} && \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\\
x_1 &= \frac{-84 - 144}{72} && \text{ou} \quad x_2 = \frac{-84 + 144}{72}\\
x_1 &= \frac{-228}{72} && \text{ou} \quad x_2 = \frac{60}{72}\\
x_1 &= \frac{-19}{6} && \text{ou} \quad x_2 = \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

D'où $S = \left\{ -\frac{19}{6}\,;\, \frac{5}{6} \right\}$

2.3 Exemple n° 3 : cas où $\Delta < 0$

$25x^2 + 20x + 53 = 0$

On a $a = 25$, $b = 20$, $c = 53$

$\Delta = b^2 - 4ac = 400 - 4 \times 25 \times 53 = 400 - 5300 = -4900$

$\Delta < 0$, donc l'équation n'a pas de solution. D'où $S = \varnothing$.

1. un carré parfait est le carré d'un entier positif

2.4 Exemple n° 4 : cas où $\Delta > 0$ et n'est pas un carré parfait

$127x^2 - 5x - 23 = 0$

On a $a = 127$, $b = -5$, $c = -23$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4 \times 127 \times (-23) = 25 + 11684 = 11709$

$\Delta > 0$, donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{11709}}{254} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{11709}}{254}$$

D'où $S = \left\{\frac{5 - \sqrt{11709}}{254} ; \frac{5 + \sqrt{11709}}{254}\right\}$

2.5 Exemple n° 5 : cas où $\Delta = 0$

$1369x^2 - 4514x + 3721 = 0$

On a $a = 1369$, $b = -4514$, et $c = 3721$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 20376196 - 20376196 = 0$

$\Delta = 0$, donc l'équation a une solution :

$x = -\frac{b}{2a} = \frac{4514}{2738} = \frac{61}{37}$.

$S = \left\{\frac{61}{37}\right\}$