1.3 Exemples d'application rédigés

1.3.1 Exemple n° 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 11 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 4$.
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique donc on précisera le premier terme et la raison.

On a $v_n = u_n - 4$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \text{ (d'après la donnée (2.))} \\
&= \left(\frac{3}{4}u_n + 1\right) - 4 \text{ (d'après la donnée (1.))} \\
&= \frac{3}{4}u_n - 3 \text{ (par simplification des calculs)} \\
&= \frac{3}{4}(v_n + 4) - 3 \text{ (par définition de } v_n\text{, on a aussi } u_n = v_n + 4) \\
&= \frac{3}{4}v_n + 3 - 3 \text{ (en développant les calculs)} \\
&= \frac{3}{4}v_n \text{ (en simplifiant les constantes)}
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n$, dont $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = 11 - 4 = 7$.

2. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 7$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.

Ainsi, l'expression de son terme général est $v_n = v_0 \times q^n = 7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

On a $u_n = v_n + 4 = 7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 4$.

3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 7$ et de raison $q = \frac{3}{4}$.

On a $0 < \frac{3}{4} < 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On a $u_n = v_n + 4$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

1.3.2 Exemple n° 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -\dfrac{3}{4}u_n + 7 \end{cases}$

1. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = u_n - 4$.
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

On a $v_n = u_n - 4$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \text{ (d'après la donnée (2.))} \\
&= \left(-\frac{3}{4}u_n + 1\right) - 4 \text{ (d'après la donnée (1.))} \\
&= -\frac{3}{4}u_n - 3 \text{ (par simplification des calculs)} \\
&= -\frac{3}{4}(v_n + 4) - 3 \text{ (par définition de } v_n\text{, on a } u_n = v_n + 4) \\
&= -\frac{3}{4}v_n + 3 - 3 \text{ (en développant les calculs)} \\
&= -\frac{3}{4}v_n \text{ (en simplifiant les constantes)}
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = -\dfrac{3}{4}v_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = -\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 4 = -2 - 4 = -6$.

3. Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -6$ et de raison $q = -\dfrac{3}{4}$.

Ainsi, l'expression de son terme général est $v_n = v_0 \times q^n = -6 \times \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$.

On a $u_n = v_n + 4$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -6 \times \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n + 4$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 = -6$ et de raison $q = -\dfrac{3}{4}$.

On a $-1 < -\dfrac{3}{4} < 0$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On a $u_n = v_n + 4$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.