

---

## Probabilités discrètes

---

### 1 Généralités

**Exercice 1.** [Démonstration des lois de De Morgan]

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On jette un dé non pipé ».

Événement A : « Le résultat est pair ».

Événement B : « Le résultat est supérieur ou égal à 3 ».

1. Déterminer l'univers  $\Omega$  associé à cette expérience.
2. Déterminer l'ensemble des cas possibles (c'est-à-dire des éléments de  $\Omega$ ) associés aux événements A et B.
3. Déterminer l'ensemble des cas possibles (c'est-à-dire des éléments de  $\Omega$ ) associés aux événements  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $\overline{A \cap B}$ ,  $\overline{A \cup B}$ ,  $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$ ,  $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ .
4. Détermine une relation entre  $\overline{A \cap B}$  et  $\overline{A \cup B}$ , et entre  $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$  et  $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$ .

**N.B. :** Ces relations sont appelées « Lois de De Morgan » et sont à connaître par cœur.

### 2 Cas d'équiprobabilité

**Exercice 2.** [Jeu de cartes]

Soit un jeu de 52 cartes. On tire une carte.

Événement A : « On tire un pique. »

Événement B : « On tire une carte rouge. »

Événement C : « On tire une figure. »

1. Déterminer l'univers  $\Omega$ .
2. Déterminer la probabilité des événements A, B, C,  $A \cap B$ ,  $A \cap C$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cup C$ .
3. Soit E l'événement : « On tire ni un pique ni une carte rouge ».
  - \* Exprimer E en fonction des événements précédents.
  - \* Déterminer  $p(E)$ .
4. Soit F l'événement : « On tire ni un pique ni une figure ».
  - \* Exprimer F en fonction des événements précédents.
  - \* Déterminer  $p(F)$ .

**Exercice 3.** [Avec des dés]

*Première partie*

On jette un dé non pipé.

Soit un événement  $A$  : « Le résultat est pair. »

Déterminer la probabilité de  $A$ .

*Deuxième partie*

On jette 2 dés non pipés.

Soit un événement  $B$  : « La somme des résultats est supérieure ou égale à 10. »

Déterminer la probabilité de  $B$ .

*Troisième partie*

On jette 3 dés non pipés.

Soit un événement  $C$  : « On fait 421. »

Déterminer la probabilité de  $C$ .

**Exercice 4.** [Avec un triplet de dés]

On jette simultanément trois dés non-pipés.

Soit un événement  $A$  : « On fait un triple. »

Quelle est la probabilité de  $A$  ?

**Exercice 5.** [Avec des boules dans une urne]

Soit une urne contenant deux boules rouges et trois boules blanches.

*Première partie*

Soit un événement  $A$  : « On tire une boule rouge. »

Quelle est la probabilité de  $A$  ?

*Deuxième partie*

On tire deux boules simultanément.

Soit un événement  $A$  : « On tire deux boules rouges. »

Soit un événement  $B$  : « On tire une boule rouge et une boule blanche. »

Soit un événement  $C$  : « On tire deux boules blanches. »

Quelle est la probabilité des événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  ?

**Exercice 6.** [Tirer des cartes, avec et sans remise]

Soit un jeu de 52 cartes.

*Première partie*

On tire successivement deux cartes avec remise.

- \* Soit un événement  $A$  : « On tire deux piques. »
- \* Soit un événement  $B$  : « On ne tire pas de pique. »
- \* Soit un événement  $C$  : « On tire au moins un pique. »
- \* Soit un événement  $D$  : « On tire un pique et un seul. »

Déterminer  $\Omega$ , puis déterminer la probabilité des événements  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

*Seconde partie*

On tire successivement deux cartes sans remise.

Déterminer le nouvel  $\Omega$ , puis déterminer la probabilité des événements  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ .

### 3 Avec des variables aléatoires

**Exercice 7.** [Exemple introductif]

On jette deux dés non pipés. On s'intéresse à la somme des résultats, et on appelle  $A$  cette somme.

Quelle est l'événement qui a la probabilité la plus élevée ?

On appelle  $A$  la variable aléatoire qui donne la somme des résultats.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre  $A$ .
2. Déterminer  $p(A = k)$ , où  $k$  prend chacune des valeurs possibles de l'ensemble précédent.
3. Quelle est la somme qui a la plus grande probabilité de sortie ?

**Exercice 8.** [Avec un dé pipé]

On jette un dé pipé.

Les nombres 1,2,3,4, et 5 ont la même probabilité de sortie, mais la probabilité d'obtenir un 6 est égale à 3 fois la probabilité d'obtenir un 1.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui donne le résultat du lancée de dé. Déterminer la probabilité de sortie de chaque nombre.