
Probabilités discrètes

1 Généralités

Exercice 1. [Démonstration des lois de De Morgan]

On considère l'expérience aléatoire suivante : « On jette un dé non pipé ».

Événement A : « Le résultat est pair ».

Événement B : « Le résultat est supérieur ou égal à 3 ».

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience.
2. Déterminer l'ensemble des cas possibles (c'est-à-dire des éléments de Ω) associés aux événements A et B.
3. Déterminer l'ensemble des cas possibles (c'est-à-dire des éléments de Ω) associés aux événements \bar{A} , \bar{B} , $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$, $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$.
4. Détermine une relation entre $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A \cup B}$, et entre $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ et $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$.

N.B. : Ces relations sont appelées « Lois de De Morgan » et sont à connaître par cœur.

2 Cas d'équiprobabilité

Exercice 2. [Jeu de cartes]

Soit un jeu de 52 cartes. On tire une carte.

Événement A : « On tire un pique. »

Événement B : « On tire une carte rouge. »

Événement C : « On tire une figure. »

1. Déterminer l'univers Ω .
2. Déterminer la probabilité des événements A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$.
3. Soit E l'événement : « On tire ni un pique ni une carte rouge ».
 - * Exprimer E en fonction des événements précédents.
 - * Déterminer $p(E)$.
4. Soit F l'événement : « On tire ni un pique ni une figure ».
 - * Exprimer F en fonction des événements précédents.
 - * Déterminer $p(F)$.

Exercice 3. [Avec des dés]

Première partie

On jette un dé non pipé.

Soit un événement A : « Le résultat est pair. »

Déterminer la probabilité de A .

Deuxième partie

On jette 2 dés non pipés.

Soit un événement B : « La somme des résultats est supérieure ou égale à 10. »

Déterminer la probabilité de B .

Troisième partie

On jette 3 dés non pipés.

Soit un événement C : « On fait 421. »

Déterminer la probabilité de C .

Exercice 4. [Avec un triplet de dés]

On jette simultanément trois dés non-pipés.

Soit un événement A : « On fait un triple. »

Quelle est la probabilité de A ?

Exercice 5. [Avec des boules dans une urne]

Soit une urne contenant deux boules rouges et trois boules blanches.

Première partie

Soit un événement A : « On tire une boule rouge. »

Quelle est la probabilité de A ?

Deuxième partie

On tire deux boules simultanément.

Soit un événement A : « On tire deux boules rouges. »

Soit un événement B : « On tire une boule rouge et une boule blanche. »

Soit un événement C : « On tire deux boules blanches. »

Quelle est la probabilité des événements A , B et C ?

Exercice 6. [Tirer des cartes, avec et sans remise]

Soit un jeu de 52 cartes.

Première partie

On tire successivement deux cartes avec remise.

- * Soit un événement A : « On tire deux piques. »
- * Soit un événement B : « On ne tire pas de pique. »
- * Soit un événement C : « On tire au moins un pique. »
- * Soit un événement D : « On tire un pique et un seul. »

Déterminer Ω , puis déterminer la probabilité des événements A , B , C et D .

Seconde partie

On tire successivement deux cartes sans remise.

Déterminer le nouvel Ω , puis déterminer la probabilité des événements A , B , C et D .

3 Avec des variables aléatoires

Exercice 7. [Exemple introductif]

On jette deux dés non pipés. On s'intéresse à la somme des résultats, et on appelle A cette somme.

Quelle est l'événement qui a la probabilité la plus élevée?

On appelle A la variable aléatoire qui donne la somme des résultats.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre A .
2. Déterminer $p(A = k)$, où k prend chacune des valeurs possibles de l'ensemble précédent.
3. Quelle est la somme qui a la plus grande probabilité de sortie?

Exercice 8. [Avec un dé pipé]

On jette un dé pipé.

Les nombres 1,2,3,4, et 5 ont la même probabilité de sortie, mais la probabilité d'obtenir un 6 est égale à 3 fois la probabilité d'obtenir un 1.

Soit X la variable aléatoire qui donne le résultat du lancée de dé. Déterminer la probabilité de sortie de chaque nombre.