Nombres complexes - sujets de bac 2017

Exercice 1. [Pondichéry avril 2017 - Exercice 2 / 3 points] On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

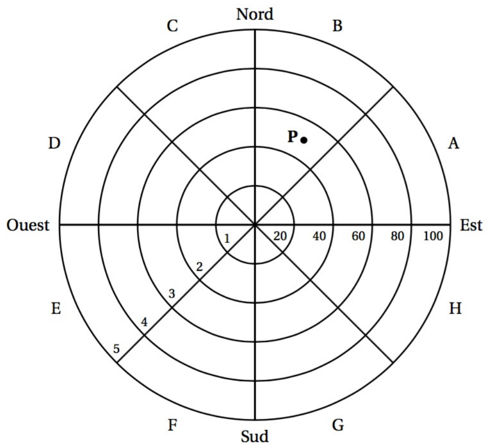
1. On considère l'équation (E) : $z^2 - 6z + c = 0$, où c est un réel strictement supérieur à 9.
   (a) Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
   (b) Justifier que les solutions de (E) sont $z_\mathrm{A} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{c-9}$ et $z_\mathrm{B} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{c-9}$.
2. On note A et B les points d'affixes respectives z_A et z_B.
   Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Exercice 2. [Antilles-Guyanes juin 2017 - Exercice 1 / 3 points] On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. On considère l'équation (E) : $z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$, ayant pour inconnue le nombre complexe z.

1. Donner une solution entière de (E).
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,
$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = \left(z^2 + z - 2\right)\left(z^2 + z + 1\right).$$
3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.
4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A, B, C, D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.
   Le quadrilatère ABCD est-il un losange ? Justifier.

Exercice 3. [Métropole juin 2017 - Exercice 3, partie A / 2 points] Dans une vaste plaine, un réseau de capteurs permet de détecter la foudre et de produire une image des phénomènes orageux. Ces données servent en particulier aux services météorologiques pour améliorer leurs prévisions et pour permettre des interventions plus rapides sur les lieux, notamment en cas d'incendie.

Le but de l'exercice est d'étudier les impacts de foudre détectés par un capteur.
L'écran radar, sur lequel les points d'impact de foudre sont observés, a l'allure suivante :



Le capteur de foudre étant représenté par le centre de l'écran, cinq cercles concentrique correspondant aux rayons respectifs 20, 40, 60, 80 et 100 kilomètres délimitent dans l'ordre cinq zones, numérotées de 1 à 5, définies par leur distance au capteur. De plus, huit segments partant du capteur délimitent huit portions, de même ouverture angulaire, nommées dans le sens trigonométrique de A à H.

L'écran est ainsi partagé en quarante secteurs dénommés par une lettre et un nombre entre 1 et 5. Par exemple, le point P positionné sur la figure est situé dans le secteur B3.

On assimile l'écran radar à une partie du plan complexe en définissant un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de la manière suivante :

- l'origine O marque la position du capteur ;
- l'axe des abscisses est orienté d'Ouest en Est ;
- l'axe des ordonnées est orienté du Sud au Nord ;
- l'unité choisie est le kilomètre.

Dans la suite, un point de l'écran radar est associé à un point d'affixe z.

PARTIE A

1. On note z_P l'affixe du point P situé dans le secteur B3 sur le graphique précédent. On appelle r le module de z_P et θ son argument dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
   Parmi les quatre propositions suivantes, déterminer la seule qui propose un encadrement correct pour r et pour θ (aucune justification n'est demandée) :

Proposition A	**Proposition B**	**Proposition C**	**Proposition D**
$40 < r < 60$ et $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$	$20 < r < 40$ et $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{4}$	$40 < r < 60$ et $\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$	$0 < r < 60$ et $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < -\dfrac{\pi}{4}$

2. Un impact de foudre est matérialisé sur l'écran en un point d'affixe z. Dans chacun des deux cas suivants, déterminer le secteur auquel ce point appartient :
   (a) $z = 70\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$;
   (b) $z = -45\sqrt{3} + 45\mathrm{i}$.

Exercice 4. [Asie juin 2017 / Exercice 3 - Affirmation 2 / 1 point] Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.
Le point est attribué si la réponse est juste et correctement justifiée.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Énoncé : Dans le plan complexe, on considère les points M et N d'affixes respectives $z_{\mathrm{M}} = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $z_{\mathrm{N}} = \dfrac{3-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

Affirmation : la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.