Intégrales - sujets de bac 2017

Exercice 1. [QCM]

1. (Pondichéry - Avril 2017) On considère la représentation graphique donnée en annexe.
   La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à un seul des intervalles suivants. Lequel ?

   a. $[9\,;\,17]$ **b.** $[18\,;\,26]$ **c.** $[27\,;\,35]$

2. (Liban - Juin 2017) On considère la fonction g définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2}{x}$.
   La valeur moyenne de la fonction g sur l'intervalle $[1\ ;\ e]$ est :

   a. 2 **b** $\dfrac{1}{\mathrm{e}-1}$ **c.** $\dfrac{2}{\mathrm{e}-1}$ **d.** $\dfrac{-2}{\mathrm{e}-1}$

3. (Centres étrangers - juin 2017) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$ dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-10	-5	3	10
$g(x)$	7 ↘	2 ↗	4 ↘	-6

   On note $I = \int_{-5}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x$. On peut affirmer que :

   a. $-5 \leqslant I \leqslant 3$ **b.** $2 \leqslant I \leqslant 4$ **c.** $16 \leqslant I \leqslant 32$ **d.** $4 \leqslant I \leqslant 8$

4. (Asie - juin 2017) Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = 1 + \ln(x)$.
   On note F la primitive sur $]0\ ;\ +\infty[$ de la fonction f qui vérifie $F(1) = 0$.
   Pour tout réel x strictement positif, $F(x) = x\ln(x)$.

   a. Vrai **b.** Faux

5. (Polynésie - juin 2017) f est la fonction définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2}$.
   La valeur exacte de l'intégrale $\int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$ est :

   1. $4\mathrm{e}^4 - 4\mathrm{e}^{-4}$ **2.** $4\left(\mathrm{e}^4 + \mathrm{e}^{-4}\right)$ **3.** 0 **4.** 1

Exercice 2. [Pondichéry - Avril 2017 - Exercice 4, partie B, question 4]
Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ d'expression : $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-x+3}$.
On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;\,7]$ par : $F(x) = (-2x-2)\mathrm{e}^{-x+3}$

1. Justifier que F est une primitive de f sur l'intervalle $[0\,;\,7]$.

2. Calculer la valeur exacte de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$.

Exercice 3. [Avec du calcul formel] [Amérique du Nord - Juin 2017 - Exercice 4, partie B, question 3.c)] À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient le résultat suivant, qui pourra être utilisé sans être démontré :

L1	$F(x) := \text{Primitive}[f(x)]$
	$\rightarrow F(x) = \frac{1}{4}\left(-2x^2+2x-1\right)\mathrm{e}^{-2x+6}$

On pose $I = \int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer la valeur exacte de I puis la valeur arrondie à 10^{-1}.

Exercice 4. [Encore du calcul formel] On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;\,20]$ par $f(x) = (-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$.

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	Dériver $(-10x+200)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
	$(-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
2	Dériver $(-2x+30)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
	$(-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
3	Dériver $(-0,4x+4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$
	$(-0,08x+0,4)\mathrm{e}^{0,2x-3}$

En utilisant les résultats donnés par le logiciel, calculer la valeur exacte de $\int_{10}^{15} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 5. [Toujours du calcul formel] [Métropole - 28 juin 2017] On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2; 4]$, par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x+1}$.

Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	factoriser(dériver $[-(x+1)*\exp(-x+1)]$
	$x*\exp(-x+1)$
2	intégrer $((x+2)*\exp(-x+1))$
	$-(x+3)*\exp(-x+1)$

En utilisant ces résultats, répondre aux questions suivantes.

1. Déterminer un intervalle sur lequel la fonction f est convexe. justifier.

2. a. Montrer que $\int_{-2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = -4+\mathrm{e}^3$.

b. En déduire la valeur moyenne arrondie au millième de la fonction f sur l'intervalle $[-2\,;\,1]$.

Annexe

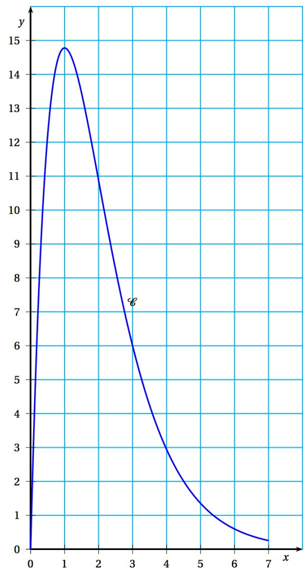

FIGURE 1 – Exercice 1 - Question 1