Fonction logarithme népérien : cours

1) Définition

L'équation $e^x = k$ admet une unique solution, notée $\ln k$, si $k \in \mathbb{R}_+^*$.
La fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui à x associe son unique antécédent par la fonction exp.

2) Propriétés générales

$x \mapsto \ln x$ est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$.

3) Signe

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	

4) Dérivée

$\forall x \in]0;+\infty[,\ \ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

5) Limites

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

6) Variations

x	0	1	$+\infty$
$1/x$		$+$	
$\ln x$	$-\infty$	0	$+\infty$

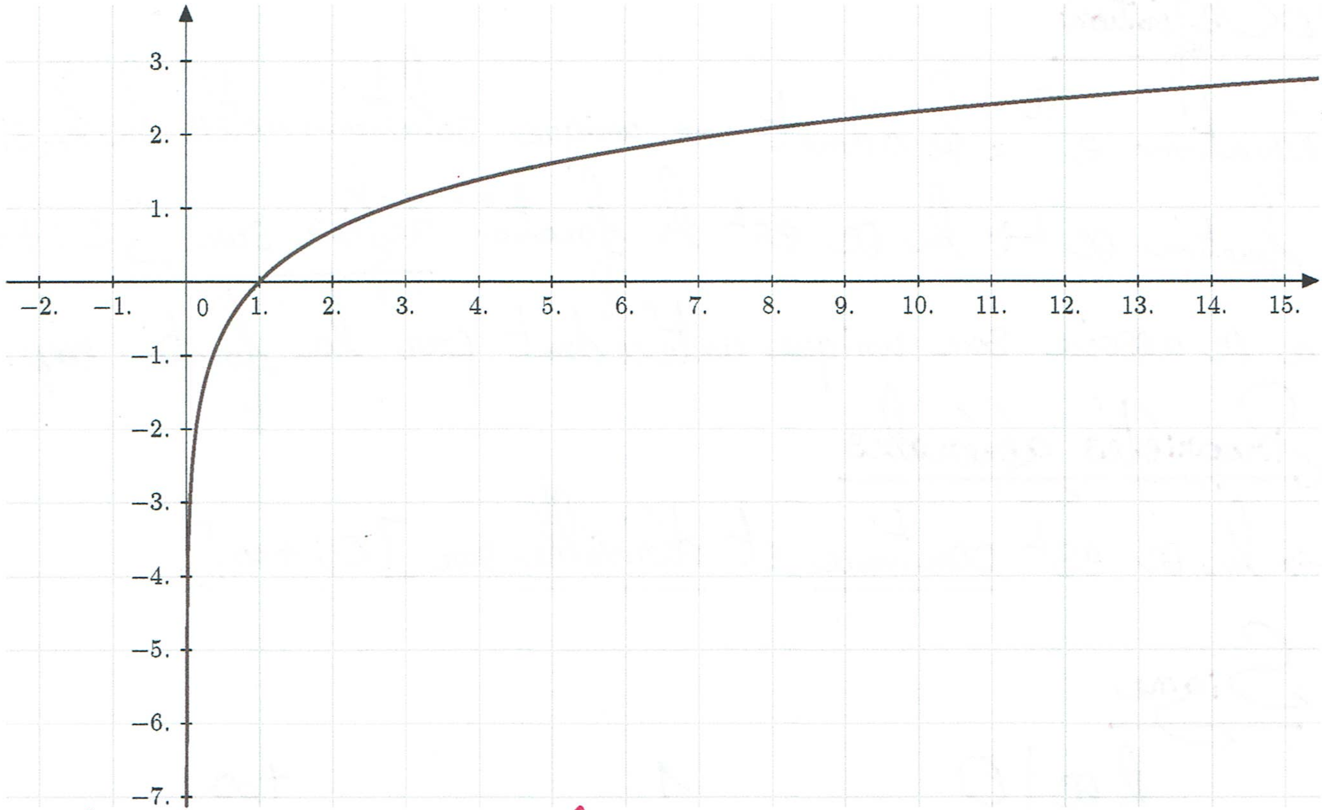
7) Primitives (HP)

$\phi : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln x$.

8) Propriétés de calcul

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ (En particulier : $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$)
- $\ln(a^n) = n\ln a$ $\left(\ln \sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\ln x\right)$

9) Représentation graphique



10) Autres propriétés utiles

- $\forall y \in \mathbb{R}, \ln(e^y) = y$ • $\forall x \in]0;+\infty[, e^{\ln x} = x$
- $\forall x > 0, \forall y > 0, \ln x = \ln y \iff x = y$ et $\ln x > \ln y \iff x > y$.
- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (Taux d'accroissement)
- Équation de la tangente en 0 : $y = x - 1$.
- f est concave sur $]0;+\infty[$, donc $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de ses tangentes.

En particulier : $\forall x \in]0;+\infty[$, $\ln x \leq x-1$, et $\ln x \leq x$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$