Mathématiques Année 2016-2017
1ères ES & S **feuille n° 1**

Probabilités discrètes

1 Généralités

Exercice 1. [Démonstration des lois de De Morgan]
On considère l'expérience aléatoire suivante : « On jette un dé non pipé ».

Événement A : « Le résultat est pair ».
Événement B : « Le résultat est supérieur ou égal à 3 ».

1. Déterminer l'univers Ω associé à cette expérience.

2. Déterminer l'ensemble des cas possibles (c'est-à-dire des éléments de Ω)) associés aux événements A et B.

3. Déterminer l'ensemble des cas possibles (c'est-à-dire des éléments de Ω)) associés aux événements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

4. Détermine une relation entre $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$, et entre $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$.

N.B. : Ces relations sont appelées « Lois de De Morgan » et sont à connaître par cœur.

Correction :

Univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Événement A : « Le résultat est pair ». $A = \{2, 4, 6\}$.

Événement B : « Le résultat est supérieur ou égal à 3 ». $B = \{3, 4, 5, 6\}$

On a :
* $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$

* $\overline{B} = \{1, 2\}$

* $A \cap B = \{4, 6\}$

* $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

* $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 3, 5\}$

* $\overline{A \cup B} = \{1\}$

* $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$

* $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 5\}$

On constate que :
* $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

* $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$

2 Cas d'équiprobabilité

Exercice 2. [Jeu de cartes]

Soit un jeu de 52 cartes. On tire une carte.

Événement A : « On tire un pique. »
Événement B : « On tire une carte rouge. »
Événement C : « On tire une figure. »

1. Déterminer l'univers Ω.

2. Déterminer la probabilité des événements A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$.

3. Soit E l'événement : « On tire ni un pique ni une carte rouge ».
 * Exprimer E en fonction des événements précédents.
 * Déterminer $p(E)$.

4. Soit F l'événement : « On tire ni un pique ni une figure ».
 * Exprimer F en fonction des événements précédents.
 * Déterminer $p(F)$.

Correction :

Ω = ensemble des 52 cartes du jeu. Donc $\text{card}\ \Omega = 52$.
* A = ensemble des piques, et $\text{card}\ A = 13$
  $p(A) = \dfrac{\text{card}\ A}{\text{card}\ \Omega} = \dfrac{13}{52} = \dfrac{1}{4}$

* B = ensemble des cartes rouges, et $\text{card}\ B = 26$
  $p(B) = \dfrac{\text{card}\ B}{\text{card}\ \Omega} = \dfrac{26}{52} = \dfrac{1}{2}$

* C = ensemble des figures, et $\text{card}\ C = 12$
  $p(C) = \dfrac{\text{card}\ C}{\text{card}\ \Omega} = \dfrac{12}{52} = \dfrac{3}{13}$

* $A \cap B$ = ensemble des piques rouges, et $\text{card}\ (A \cap B) = 0$
  $p(A \cap B) = 0$ car A et B sont incompatibles.

* $A \cap C$ = ensemble des figures de piques, et $\text{card}\ (A \cap C) = 3$
  $p(A \cap C) = \dfrac{\text{card}\ (A \cap C)}{\text{card}\ \Omega} = \dfrac{3}{52}$

* $A \cup B$ = ensemble des piques ou des cartes rouges
  $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ car A et B sont incompatibles.
  $p(A \cup B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$

* $A \cup C$ = ensembles des piques ou des figues ou les deux.
  $p(A \cup C) = p(A) + p(B) - p(A \cap C)$
  $p(A \cup C) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{13} - \dfrac{3}{52} = \dfrac{11}{26}$

Soit un événement E : « On tire ni un pique ni une carte rouge. »
Ainsi, la probabilité de tirer un trèfle est $p(E) = \dfrac{1}{4}$.
Autre méthode : $E = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$.
$p(E) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - p(A \cup B)$
$p(E) = 1 - \dfrac{3}{4}$
$p(E) = \dfrac{1}{4}$

Soit un événement F : « On tire ni un pique ni une figure. »
$F = \overline{A} \cap \overline{C} = \overline{A \cup C}$.
$p(F) = p\left(\overline{A \cup C}\right) = 1 - p(A \cup C)$
$p(F) = 1 - \dfrac{11}{26}$
$p(F) = \dfrac{15}{26}$

Exercice 3. [Avec des dés]
Première partie
On jette un dé non pipé.
Soit un événement A : « Le résultat est pair. »
Déterminer la probabilité de A.

Deuxième partie
On jette 2 dés non pipés.
Soit un événement B : « La sommes des résultats est supérieure ou égale à 10. »
Déterminer la probabilité de B.

Troisième partie
On jette 3 dés non pipés.
Soit un événement C : « On fait 421. »
Déterminer la probabilité de C.

Correction :

Première partie : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec card$\Omega = 6$.

$A = \{2, 4, 6\}$ et card $A = 3$.

$p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

Deuxième partie : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, avec card $\Omega = 6 \times 6 = 36$.

$B = \{(4, 6)\,(5, 6)\,(5, 5)\,(5, 6)\,(6, 5)\,(6, 4)\}$, avec card $B = 6$

$p(B) = \dfrac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

Troisième partie : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
avec card $\Omega = 6 \times 6 \times 6 = 216$.

$C = \{(4, 2, 1)\,(4, 1, 2)\,(2, 4, 1)\,(2, 1, 4)\,(1, 4, 2)\,(1, 2, 4)\}$, avec card $C = 6$

$p(C) = \dfrac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$

Exercice 4. [Avec un triplet de dés]
On jette simultanément trois dés non-pipés.
Soit un événement A : « On fait un triple. »
Quelle est la probabilité de A ?

Correction :

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et card $\Omega = 6 \times 6 \times 6 = 216$

$A = (1, 1, 1) \cap (2, 2, 2) \cap (3, 3, 3) \cap (4, 4, 4) \cap (5, 5, 5) \cap (6, 6, 6)$, et card $A = 6$

$p(A) = \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$

Exercice 5. [Avec des boules dans une urnes]
Soit une urne contenant deux boules rouges et trois boules blanches.

Première partie
Soit un événement A : « On tire une boule rouge. »
Quelle est la probabilité de A ?

Deuxième partie
On tire deux boules simultanément.
Soit un événement A : « On tire deux boules rouges. »
Soit un événement B : « On tire une boule rouge et une boules blanche. »
Soit un événement C : « On tire deux boules blanches. »
Quelle est la probabilité des événements A, B et C ?

Correction :

Première partie
$\Omega = \{R_1, R_2, B_1, B_2, B_3\}$, et card $\Omega = 5$

$A = \{R_1, R_2\}$, et card $A = 2$

$$p\left(A\right) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{2}{5}$$

Deuxième partie :
$\Omega = \{\{R_1, R_2\}\,\{R_1, B_1\}\,\{R_1, B_2\}\,\{R_1, B_3\}\,\{R_2, B_1\}\,\{R_2, B_2\}\,\{R_2, B_3\}\,\{B_1, B_2\}\,\{B_1, B_3\}\,\{B_2, B_3\}\}$,
card $\Omega = 10$.

Remarque : Ω est un ensemble de paires de boules.

$A = \{\{R_1, R_2\}\}$, et card $A = 1$

$$p\left(A\right) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{1}{10}$$

$B = \{\{R_1, B_1\}\,\{R_1, B_2\}\,\{R_1, B_3\}\,\{R_2, B_1\}\,\{R_2, B_2\}\,\{R_2, B_3\}\}$, et card $B = 6$

$$p\left(A\right) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$B = \{\{B_1, B_2\}\,\{B_1, B_3\}\,\{B_2, B_3\}\}$, et card $C = 3$

$$p\left(A\right) = \frac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} = \frac{3}{10}$$

On vérifie que $p\left(A\right) + p\left(B\right) + p\left(C\right) = 1$

On a bien $\dfrac{1}{10} + \dfrac{6}{10} + \dfrac{3}{10} = 1$

Exercice 6. [Tirer des cartes, avec et sans remise]
Soit un jeu de 52 cartes.

Première partie
On tire successivement deux cartes avec remise.

* Soit un événement A : « On tire deux piques. »
* Soit un événement B : « On ne tire pas de pique. »
* Soit un événement C : « On tire au moins un pique. »
* Soit un événement D : « On tire un pique et un seul. »

Déterminer Ω, puis déterminer la probabilité des événements A, B, C et D.

Seconde partie
On tire successivement deux cartes sans remise.
Déterminer le nouvel Ω, puis déterminer la probabilité des événements A, B, C et D.

Correction :

Première partie
Ω = ensemble des 52 cartes $\times$ ensemble des 52 cartes, avec card $\Omega = 52 \times 52 = 2704$

A = ensemble des 13 piques $\times$ ensemble des 13 piques, et card $A = 13 \times 13 = 169$

$p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \dfrac{169}{2704} = \dfrac{1}{16}$

B = ensemble des 39 cartes non-piques $\times$ ensemble des 39 cartes non-piques,
et card $B = 39 \times 39 = 1521$

$p(B) = \dfrac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \dfrac{1521}{2704} = \dfrac{9}{16}$

$C = \overline{B}$

$p(C) = p\left(\overline{B}\right) = 1 - p(B) = 1 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{7}{16}$

$D = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$p(D) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - p(A \cup B)$.

Or, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ car A et B sont incompatibles.

Ainsi $p(A \cup B) = \dfrac{1}{16} + \dfrac{9}{16} = \dfrac{10}{16} = \dfrac{5}{8}$

Et $p(D) = 1 - \dfrac{5}{8} = \dfrac{3}{8}$

On vérifie que $(A) + (D) + (B) = 1$ (ensemble des cas possibles).
On constate d'ailleurs que $(A) + (B) + (C) + (D) \neq 1$.
Seconde partie
Ω = ensemble des 52 cartes $\times$ ensemble des 51 cartes restantes, avec card $\Omega = 52 \times 51 = 2652$.

A = ensemble des 13 piques $\times$ ensemble des 12 piques restants, et card $A = 13 \times 12 = 156$

$p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \dfrac{156}{2652} = \dfrac{1}{17}$

B = ensemble des 39 cartes non-piques $\times$ ensemble des 38 cartes non-piques restantes, et card $B = 39 \times 38 = 1482$

$p(B) = \dfrac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \dfrac{1482}{2652} = \dfrac{19}{34}$

$C = \overline{B}$

$p(C) = p\left(\overline{B}\right) = 1 - p(B) = 1 - \dfrac{19}{34} = \dfrac{15}{34}$

$D = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$p(D) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - p(A \cup B)$.

Or, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ car A et B sont incompatibles.

Ainsi $p(A \cup B) = \dfrac{1}{17} + \dfrac{19}{34} = \dfrac{21}{34}$
Et $p(D) = 1 - \dfrac{21}{34} = \dfrac{13}{34}$

On vérifie que $(A) + (D) + (B) = 1$ (ensemble des cas possibles). On constate d'ailleurs que $(A) + (B) + (C) + (D) \neq 1$.

3 Avec des variables aléatoires

Exercice 7. [Exemple introductif]

On jette deux dés non pipés. On s'intéresse à la somme des résultats, et on appelle A cette somme.
Quelle est l'événement qui a la probabilité la plus élevée ?

On appelle A la variable aléatoire qui donne la somme des résultats.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre A.
2. Déterminer $p(A = k)$, où k prend chacune des valeurs possibles de l'ensemble précédent.
3. Quelle est la somme qui a la plus grande probabilité de sortie ?

Correction :

* $p(A = 1) = 0$
* $p(A = 2) = \dfrac{1}{36}$
* $p(A = 3) = \dfrac{1}{18}$
* $p(A = 4) = \dfrac{1}{12}$
* $p(A = 5) = \dfrac{1}{9}$
* $p(A = 6) = \dfrac{5}{36}$
* $p(A = 7) = \dfrac{1}{6}$
* $p(A = 8) = \dfrac{5}{36}$
* $p(A = 9) = \dfrac{1}{9}$

* $p(A=10) = \dfrac{1}{12}$
* $p(A=11) = \dfrac{1}{18}$
* $p(A=12) = \dfrac{1}{36}$

L'événement $A = 7$ a donc la probabilité la plus élevée.

Remarque : La somme des probabilités est bien égale à 1.

Exercice 8. [Avec un dé pipé]

On jette un dé pipé.
Les nombres 1,2,3,4, et 5 ont la même probabilité de sortie, mais la probabilité d'obtenir un 6 est égale à 3 fois la probabilité d'obtenir un 1.

Soit X la variable aléatoire qui donne le résultat du lancée de dé. Déterminer la probabilité de sortie de chaque nombre.

Correction :

$p(X=1) = p(X=2) = p(X=3) = p(X=4) = p(X=5) = p_0$

$p(X=6) = 3p(X=1) = 3p_0$

On a $p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) + p(X=6) = 1$

$p_0 + p_0 + p_0 + p_0 + p_0 + 3p_0 = 1$

$5p_0 + 3p_0 = 1$

$8p_0 = 1$

$p_0 = \dfrac{1}{8}$

Donc :

* $p(X=1) = \dfrac{1}{8}$
* $p(X=2) = \dfrac{1}{8}$
* $p(X=3) = \dfrac{1}{8}$
* $p(X=4) = \dfrac{1}{8}$
* $p(X=5) = \dfrac{1}{8}$

* $p\left(X=6\right)=\frac{3}{8}$