Calculs de nombres dérivés

Exercice 1. [Nombre dérivé de la fonction carrée]

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Correction :

Soit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$

On a $D_f = \mathbb{R}$.

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 5$. On a alors $f(5) = 25$.

$$\begin{array}{rcll} T(h) & = & \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} & \\ & = & \dfrac{f(5 + h) - f(5)}{h} & \\ & = & \dfrac{(5 + h)^2 - 25}{h} & \\ & = & \dfrac{h^2 + 10h + 25 - 25}{h} & \\ & = & \dfrac{h^2 + 10h}{h} & \\ & = & \dfrac{h\,(h + 10)}{h} & \\ & = & h + 10 & \text{si } h \neq 0 \end{array}$$

$\lim\limits_{h\to 0} T(h) = \lim\limits_{h\to 0}(h + 10) = 10$. Donc f est dérivable en $x_0 = 5$ et $f'(5) = 10$.

Exercice 2. [Nombre dérivé d'une fonction trinôme du second degré]

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 - 2x - 3 \end{array}$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Correction :

Soit la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 - 2x - 3 \end{array}$

On a $D_f = \mathbb{R}$.

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 5$. On a alors $f(5) = 5^2 - 10 - 3 = 12$.

$$\begin{array}{rcll} T(h) & = & \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} & \\ & = & \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} & \\ & = & \dfrac{(5+h)^2 - 2(5+h) - 3 - 12}{h} & \\ & = & \dfrac{h^2 + 10h + 25 - 10 - 2h - 15}{h} & \\ & = & \dfrac{h^2 + 8h}{h} & \\ & = & \dfrac{h(h+8)}{h} & \\ & = & h + 8 & \text{si } h \neq 0 \end{array}$$

$\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} (h+8) = 8$. Donc f est dérivable en $x_0 = 5$ et $f'(5) = 8$.

Exercice 3. [Nombre dérivé de la fonction inverse]

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Correction :

$$\text{Soit la fonction } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{1}{x} \end{array}$$

On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 5$. On a alors $f(5) = \dfrac{1}{5}$.

$$\begin{array}{rcl} T(h) & = & \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ & = & \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} \\ & = & \dfrac{\dfrac{1}{5+h} - \dfrac{1}{5}}{h} \\ & = & \dfrac{\dfrac{5-(5+h)}{5(5+h)}}{h} \\ & = & \dfrac{\dfrac{5-5-h}{5(5+h)}}{h} \\ & = & \dfrac{\dfrac{-h}{5(5+h)}}{h} \\ & = & \dfrac{-h}{5(5+h)} \times \dfrac{1}{h} \\ & = & \dfrac{-1}{5\,(5+h)} \qquad\qquad \text{si } h \neq 0 \end{array}$$

$\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-1}{5\,(5+h)} = \dfrac{-1}{25}$. Donc f est dérivable en $x_0 = 5$ et $f'(5) = -\dfrac{1}{25}$.

Exercice 4. [Nombre dérivé d'une fonction homographique]

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Correction :

$$\text{Soit la fonction } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \dfrac{x-1}{x+1} \end{array}$$

On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 5$. On a alors $f(5) = \dfrac{5-1}{5+1} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

$$\begin{array}{rcl} T(h) & = & \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ & = & \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} \\ & = & \dfrac{\dfrac{(5+h)-1}{5+h+1} - \dfrac{2}{3}}{h} \\ & = & \dfrac{\dfrac{4+h}{6+h} - \dfrac{2}{3}}{h} \\ & = & \dfrac{\dfrac{12+3h-12-2h}{3(h+6)}}{h} \\ & = & \dfrac{\dfrac{h}{3(h+6)}}{h} \\ & = & \dfrac{h}{3(h+6)} \times \dfrac{1}{h} \\ & = & \dfrac{1}{3(h+6)} \qquad \text{si } h \neq 0 \end{array}$$

$\lim\limits_{h\to 0} T(h) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{3(h+6)} = \dfrac{1}{18}$. Donc f est dérivable en $x_0 = 5$ et $f'(5) = \dfrac{1}{18}$.

Exercice 5. [Nombre dérivé de la fonction racine carrée]

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Correction :

Soit la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x} \end{array}$

On a $D_f = \mathbb{R}^+ = [0\ ;\ +\infty[$.

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 5$. On a alors $f(5) = \sqrt{5}$.

$$\begin{array}{rcl} T(h) & = & \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\ & = & \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} \\ & = & \dfrac{\sqrt{5+h} - \sqrt{5}}{h} \\ & = & \dfrac{\left(\sqrt{5+h} - \sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5+h} + \sqrt{5}\right)}{h\left(\sqrt{5+h} + \sqrt{5}\right)} \\ & = & \dfrac{5+h-5}{h\left(\sqrt{5+h} + \sqrt{5}\right)} \\ & = & \dfrac{h}{h\left(\sqrt{5+h} + \sqrt{5}\right)} \\ & = & \dfrac{1}{\sqrt{5+h} + \sqrt{5}} \qquad\qquad \text{si } h \neq 0 \end{array}$$

$\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{5+h} + \sqrt{5}} = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$. Donc f est dérivable en $x_0 = 5$ et $f'(5) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

Exercice 6. [Nombre dérivé d'une fonction irrationnelle]

$$\text{Soit } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x+11} - 1 \end{array}$$

Déterminer l'ensemble de définition de f, puis calculer le nombre dérivé de f en $a = 5$.

Correction :

$$\text{Soit la fonction } f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sqrt{x+11} - 1 \end{array}$$

Il faut que $x + 11 \geqslant 0 \iff x \geqslant -11$.

On a donc $D_f = [-11 \; ; \; +\infty[$.

Montrons que f est dérivable en $x_0 = 5$. On a alors $f(5) = \sqrt{16} - 1 = 3$.

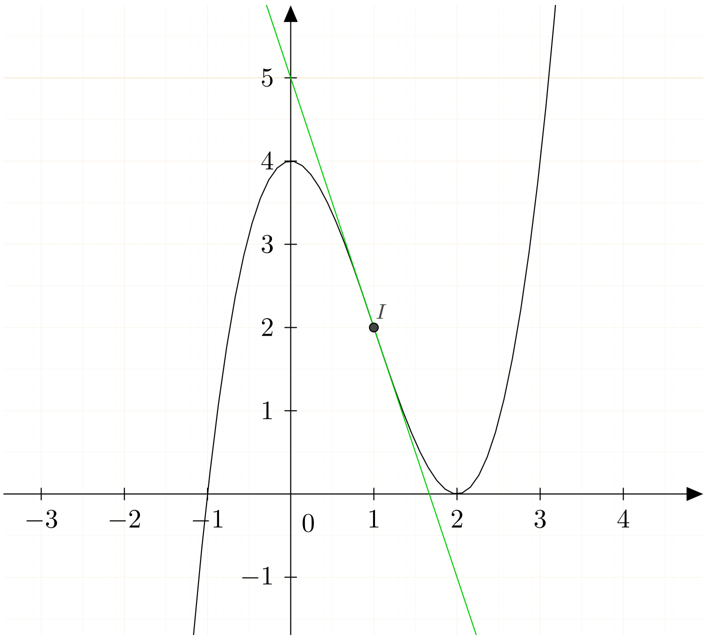
$$\begin{aligned}
T(h) &= \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{f(5+h) - f(5)}{h} \\
&= \frac{\sqrt{(5+h)+11} - 1 - 3}{h} \\
&= \frac{\left(\sqrt{h+16} - 4\right)\left(\sqrt{h+16} + 4\right)}{h\left(\sqrt{h+16} + 4\right)} \\
&= \frac{h + 16 - 16}{h\left(\sqrt{h+16} + 4\right)} \\
&= \frac{h}{h\left(\sqrt{h+16} + 4\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{h+16} + 4} \qquad\qquad \text{si } h \neq 0
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{h+16} + 4} = \dfrac{1}{8}$. Donc f est dérivable en $x_0 = 5$ et $f'(5) = \dfrac{1}{8}$.

Exercice 7. [Équation de tangente]

Soit la fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \end{array}$

On a $D_f = \mathbb{R}$.



Déterminer l'équation de la tangente au point $I(1, 2)$.

Correction :

On cherche l'équation de la tangente au point $I(1\ ;\ 2)$.

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

On cherche $f'(1)$.

$$\begin{array}{rcll}
T(h) & = & \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} & \\
 & = & \dfrac{\left[(1+h)^3 - 3\,(1+h)^2 + 4\right] - 2}{h} & \\
 & = & \dfrac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3\,(1 + 2h + h^2) + 4 - 2}{h} & \\
 & = & \dfrac{1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 6h - 3h^2 + 4 - 2}{h} & \\
 & = & \dfrac{h^3 - 3h}{h} & \\
 & = & \dfrac{h\,(h^2 - 3)}{h} & \\
 & = & h^2 - 3 & \text{si } h \neq 0
\end{array}$$

$\lim\limits_{h \to 0} T(h) = \lim\limits_{h \to 0} (h^2 - 3) = -3$. D'où $f'(1) = -3$

Dans l'équation de la tangente au point $I(1\ ;\ 2)$:

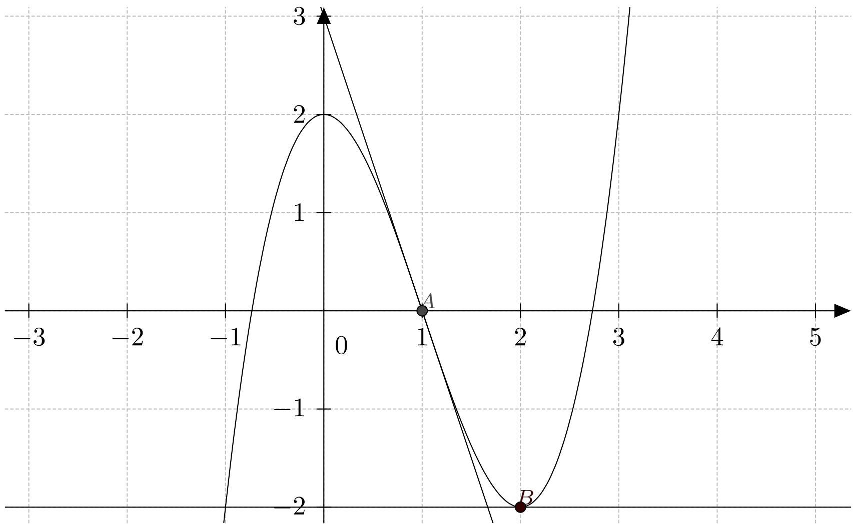
$$\begin{aligned} y = & \quad f'(1)(x-1)+f(1) \\ y = & \quad -3\,(x-1)+2 \\ y = & \quad -3x+3+2 \\ y = & \quad -3x+5 \end{aligned}$$

Donc la droite tangente à la courbe au point $I(1\ ;\ 2)$ a pour équation $y=-3x+5$.

Exercice 8. La courbe ci-contre représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On note A et B deux points de cette courbe de coordonnées respectives : $A\,(1\ ;\ 0)$ et $B\,(2\ ;\ -2)$.

On appelle T_1 et T_2 les tangentes à la courbe, respectivement en A et en B.



1. a) Par lecture graphique, déterminer $f'(1)$ et $f'(2)$.
   b) Déterminer une équation de la droite T_1.

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.
   Retrouver par le calcul les résultats obtenus par lecture graphique à la question 1)a).

Correction :

1. a) Par lecture graphique, on a $f'(-1)=-3$ et $f'(2)=0$.

   b) On cherche l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

   $f'(1)=-3$ d'après la question $1.a)$, et $f(1)=0$ car $A(1,0)$.

   D'où $T_1 : y=f'(1)\,(x-1)+f(1)$, i.e. $y=-3\,(x-1)+0$.

   On en conclut que $T_1 : y=-3x+3$.

2. Soit $f : x \longmapsto x^3 - 3x^2 + 2$.

   f est une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On a $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 6x$.

   On retrouve ainsi les résultats de la question $1.a)$:

   $f'(1) = 3 \times 1^2 - 6 = -3$ et $f'(2) = 3 \times 2^2 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$.