Résolution d'équations trigonométriques

Première équation : $4\sin^2(2x) = 3$

On résoudra cette équation sur $\mathbb{R}$, puis on restreindra l'intervalle des solutions à $[0\,;\,2\pi]$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } 4\sin^2(2x) = 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin^2(2x) = \frac{3}{4} \\
&\Longleftrightarrow \quad \sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

On étudiera ces deux cas séparément, pour éviter la lourdeur de l'écriture.

Premier cas : $\sin(2x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sin(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin(2x) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{x = -\frac{\pi}{6} + k\pi} \text{ ou } \boxed{x = \frac{2\pi}{3} + k\pi}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Second cas : $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned}
\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\pi} \text{ ou } \boxed{x = \frac{\pi}{3} + k\pi}, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

On a ainsi : $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{\pi}{6} + k\pi\,;\ \dfrac{\pi}{6} + k\pi\,;\ \dfrac{\pi}{3} + k\pi\,;\ \dfrac{2\pi}{3} + k\pi\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Dans $[0\,;\,2\pi]$, la mesure $-\dfrac{\pi}{6}$ devient $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{11\pi}{6}$.

De plus, on ajoute $k\pi$, avec ici $k = 1$, pour ne pas dépasser l'intervalle. On a donc 8 solutions dans $[0\,;\,2\pi]$, car on a $-\dfrac{\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{5\pi}{6}$, mais aussi $\dfrac{2\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3} + \pi = \dfrac{5\pi}{3}$, et $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{7\pi}{6}$, et enfin $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{4\pi}{3}$.

Toutes ces mesures appartiennent à l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$, D'où $S_{[0\,;\,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{6}\,;\ \dfrac{\pi}{3}\,;\ \dfrac{5\pi}{6}\,;\ \dfrac{2\pi}{3}\,;\ \dfrac{4\pi}{3}\,;\ \dfrac{7\pi}{6}\,;\ \dfrac{5\pi}{3}\,;\ \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

Seconde équation : $4\cos^2(2x) = 3$

On résoudra cette équation sur $\mathbb{R}$, puis on restreindra l'intervalle des solutions à $[0\,;\,2\pi]$.

$$\begin{aligned}\text{On a } 4\cos^2(2x) = 3 \quad &\iff \quad \cos^2(2x) = \frac{3}{4}\\ &\iff \quad \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

On étudiera ces deux cas séparément, pour éviter la lourdeur de l'écriture.

Premier cas : $\cos(2x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned}\cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\iff \quad \cos(2x) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right),\ k \in \mathbb{Z}\\ &\iff \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ &\iff \quad \boxed{x = \frac{5\pi}{12} + k\pi} \text{ ou } \boxed{x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi},\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Second cas : $\cos(2x) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\begin{aligned}\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\iff \quad \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right),\ k \in \mathbb{Z}\\ &\iff \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\\ &\iff \quad \boxed{x = \frac{\pi}{12} + k\pi} \text{ ou } \boxed{x = -\frac{\pi}{12} + k\pi},\ k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Ainsi on a $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\dfrac{5\pi}{12} + k\pi\,;\, -\dfrac{\pi}{12} + k\pi\,;\, \dfrac{\pi}{12} + k\pi\,;\, \dfrac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Par un même travail sur les solutions que dans l'exercice précédent, on a dans l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$ les mesures $-\dfrac{5\pi}{12}$ et $-\dfrac{\pi}{12}$ qui deviennent respectivement $\dfrac{7\pi}{12}$ et $\dfrac{11\pi}{12}$.

Dans $[0\,;\,2\pi]$, on a donc les solutions : $\dfrac{5\pi}{12}$ et $\dfrac{5\pi}{12} + \pi = \dfrac{17\pi}{12}$, $\dfrac{7\pi}{12}$ et $\dfrac{7\pi}{12} + \pi = \dfrac{19\pi}{12}$, $\dfrac{\pi}{12}$ et $\dfrac{\pi}{12} + \pi = \dfrac{13\pi}{12}$, et enfin $\dfrac{11\pi}{12} + \pi = \dfrac{23\pi}{12}$.

Ainsi $S_{[0\,;\,2\pi]} = \left\{\dfrac{\pi}{12}\,;\,\dfrac{5\pi}{12}\,;\,\dfrac{7\pi}{12}\,;\,\dfrac{11\pi}{12}\,;\,\dfrac{13\pi}{12}\,;\,\dfrac{17\pi}{12}\,;\,\dfrac{19\pi}{12}\,;\,\dfrac{23\pi}{12}\right\}$.